Weil予想と数論幾何

落合　理 (大阪大学理学研究科)

2004年8月5日

大まかな話の内容

★ 数論幾何学とゼータ函数
(代数多様体に付随するゼータ函数)
★ 有限体について
★ 合同ゼータ函数の定義とWeil予想
★ 証明（の一部）と歴史や展望など

数論幾何学の目的

$$||$$

有理数体$\mathbb{Q}$上の代数多様体の研究

体$\cdots$ 加減乗除の定まった集合のこと
(有理数体$\mathbb{Q}$, 実数体$\mathbb{R}$, 複素数体$\mathbb{C}$, 有理函数体$\mathbb{C}(x)$, etc)

体kの上の **(非特異射影的) 代数多様体** Xとは適当な有限個の多項式

$$f_1(x_1,\cdots,x_d),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_d)\in k[x_1,\cdots,x_d]$$

の共通零点集合として定まる "図形" で特異点のないもの
(正確には更に張り合わせてコンパクト化したもの)

非常に粗い代数多様体の地図

<table>
<tr><td></td><td colspan="6">小平次元</td></tr>
<tr><td>次元0</td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td>次元1 ＝ 代数曲線</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td colspan="3">なし</td></tr>
<tr><td>次元2 ＝ 代数曲面</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td colspan="2">なし</td></tr>
<tr><td>$\cdots$</td><td colspan="6">$\cdots\cdots$</td></tr>
<tr><td>次元n</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>$\cdots$</td><td>n</td></tr>
</table>

空間の次元または小平次元が大きくなるほど複雑で難しくなる.

$\boxed{k = \mathbb{C}\text{での代数多様体の具体例}}$

1.代数曲線

まず，複素数体$\mathbb{C}$上においては

$$\text{非特異射影的代数曲線} = \text{コンパクトリーマン面}$$

である．

$$\text{コンパクトリーマン面}\,S \mapsto \text{種数}\,g$$

という不変量を考えられる．gの定義は

$$g := 2\text{次元閉曲面としての穴の数}$$

で与えられ，

	小平次元$-\infty$	小平次元0	小平次元1
種数g	$g = 0$	$g = 1$	$g \geq 2$

という様子になっている．

2.射影空間$\mathbb{P}^n$

$\mathbb{P}^n$はアファイン空間$\mathbb{A}^n = \mathbb{C}^n$ の非特異コンパクト化として得られる．($\mathbb{A}^n = \mathbb{C}^n$ の非特異コンパクト化は一意ではない)

次のような胞体分割がある

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^n &= \mathbb{A}^n \coprod \mathbb{P}^{n-1} \\ &= \mathbb{A}^n \coprod \mathbb{A}^{n-1} \coprod \mathbb{P}^{n-2} \\ &\cdots \\ &= \mathbb{A}^n \coprod \mathbb{A}^{n-1} \coprod \cdots \coprod \mathbb{A}^1 \coprod \{1\text{点}\}\end{aligned}$$

$\mathbb{P}^n$ の小平次元は $-\infty$ である.

3.アーベル多様体 A

n 次元アーベル多様体 A とは, 複素トーラス $A = \mathbb{C}^n/L$ で与えられ(L は $\mathbb{C}^n$ の階数 $2n$ の格子点のなす群), ある射影空間に埋め込み $A \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ があるもの.
(群構造をもつ非特異射影多様体としても特徴付けられる)
アーベル多様体のの小平次元は0 である.

4.フェルマー多様体 $F_n^{(d)}$

次数 d の n 次元フェルマー多様体 $F_n^{(d)}$ とは

$$x_1^d + x_2^d + \cdots + x_n^d + x_{n+1}^d = 1$$

（のコンパクト化）で定まる非特異 n 次元多様体.

	小平次元 $-\infty$	小平次元0	小平次元 n
次数 d	$d \leq n+1$	$d = n+2$	$d \geq n+3$

という様子になっている ($d = n+2$ のときがカラビヤウ多様体と呼ばれるクラスに属する).

代数多様体のBettiコホモロジー

X を $\mathbb{C}$ 上の n 次元非特異射影代数多様体とする．このとき特異コホモロジーと呼ばれる $\mathbb{Q}$-ベクトル空間

$$H^i_{\mathrm{Betti}}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q}) \cong H_i^{\mathrm{Betti}}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})^*$$

が定まる $(0 \le i \le 2n)$．コホモロジーは空間の複雑さを表す代数的な量であるとも言える．

先に挙げた代数多様体の一部で例を与えておく
1．X が種数 g の代数曲線のとき

$$H^i_{\mathrm{Betti}}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & i=0 \text{ or } i=2 \\ \mathbb{Q}^{\oplus 2g} & i=1 \end{cases}$$

となる．
2．X が射影空間 $\mathbb{P}^n$ のとき

$$H^i_{\mathrm{Betti}}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}),\mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \{0\} & 0 \le i \le 2n \text{ odd} \\ \mathbb{Q} & 0 \le i \le 2n \text{ even} \end{cases}$$

定義体が有理数体であることも難しさとなる．例えば有名な結果を思い出してみよう

フェルマー予想＝Wilesの定理(1994)

$p \geq 3$を任意の奇素数とする．
p次フェルマー曲線$F_1^{(p)}: x_1^p + x_2^p = 1$の$\mathbb{Q}$-有理点$F_1^{(p)}(\mathbb{Q})$（座標が$\mathbb{Q}$に入る$F_1^{(p)}$の点）は$(0,1)$又は$(1,0)$のみである．

Remark

1．有理数体$\mathbb{Q}$の上の非特異射影代数多様体X の有理点$X(\mathbb{Q})$の分布にXの小平次元などの幾何的な情報が影響することが知られている

2．$X(\mathbb{C})$の様子などは（$X(\mathbb{Q})$に比べて）簡単である．リーマン面の構造が入り種数だけによって位相的に分類される．

まとめ

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{有理数体の代数方程式の問題からくる微妙さ（数論）} \\ \text{代数多様体}\, X\, \text{の幾何的な性質（代数幾何）} \end{array} \right.$$

が絡んでいるところが難しさであり面白さでもあるといえる．

数論幾何の基本的な考え方

$$\text{有理数体上の代数多様体}\, X$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\text{(Hasse-Weil)ゼータ函数}}\ \zeta_X(s)$$

代数多様体 X に対してゼータ函数と呼ばれる "よい" 複素函数 $\zeta_X(s)$ を定めることができ, X の様々な性質はゼータ函数に反映されている (と期待されている). 例えば, 次のようなことが予想されている.

予想 A をアーベル多様体とするとき

$$A(\mathbb{Q})\text{が無限} \Longleftrightarrow \zeta_A(s)\text{が}\, s = 1\, \text{で零点をもつ}$$

かくして現在の数論においてはいくつかの性質をみたす "ゼータ函数" と呼ばれる複素函数の族を研究することが主要テーマとなっている.

以下一番簡単な (Hasse-Weil) ゼータ函数の例であるリーマンゼータについて振り返りたい.

リーマンのゼータ函数$\zeta(s)$とは次で定まる複素函数:

$$\zeta(s) = \sum_{n:\text{自然数}} \frac{1}{n^s}$$

(複素平面$\mathbb{C}$内の$\mathrm{Re}(s) > 1$なる領域で収束)

$\boxed{\zeta(s)\text{の知られた事実と予想}}$

1.オイラー積

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} \left(\frac{1}{1 - 1/p^s}\right)$$

「オイラー積表示」
「$\zeta(s)$は$s = 1$で1位の極」 $\Longrightarrow$ 「素数の個数の無限性」

2.函数等式

適当なガンマ函数をかけて$\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$
とおくと, 次の函数等式がある:

$$\xi(s) = \xi(1 - s)$$

函数等式 $\Longrightarrow$ $\zeta(s)$は複素平面全体に有理型に接続.

3. リーマン予想

$\zeta(s)$ の零点は $s = -2, -4, \cdots, -2n, \cdots$ にの零点（これらを自明な零点とよぶ）をもつ以外は $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 上にしか存在しないだろう（リーマン予想と呼ばれる未解決問題）

4. 整数点での値

正の偶数 $2n = 2, 4, 6, \cdots$ に対して次が知られている:

1. $\zeta(2n)$ は有理数と π^{2n} の積

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{120},\ \cdots$$

2. $\zeta(1-2n)$ は 0 でない有理数

$$\zeta(-1) = \frac{-1}{2^2 \cdot 3},\ \zeta(-3) = \frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 5},\ \cdots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta(m)\text{ に円周率が現れることの意味（背後に潜む理由）} \\ \zeta(m)\text{ の有理数部分の意味（背後に潜む理由）} \end{array} \right.$$

については近年やっと満足のいく説明がつくようになってきたといえる.

例えば，Wiles(1994) より遥か以前に次のことが示されていることをもって値に大事な意味が隠されていることを垣間見ていただきたい.

定理 (Kummer)

p が $2 \leq 2n \leq p-3$ なる全ての正の偶数で $\zeta(1-2n)$ の分子を割りきらない奇素数とする．このとき，$x_1^p + x_2^p = 1$ に対するフェルマー予想は正しい.

$p \leq 100$ なる素数のうちで定理の条件をみたさないものは $p = 37, 59, 67$ のみである.

$\boxed{\text{(Hasse-Weil)ゼータ函数 } \zeta_X(s)}$

1．Xを有理数体$\mathbb{Q}$上の非特異射影代数多様体とする.

$$\Downarrow$$

2．有限個の例外を除いた全ての素数pで，(係数のp還元によって) $\mathbb{F}_p$の上の代数多様体X_pが定まる.

但し，素数pをひとつ決めたとき$\mathbb{F}_p$は以下のようにして与えられる体である.

整数nに対して

$$\overline{n} := n \text{を} p \text{でわった余り}$$

という取り決めで足し算や掛け算の規則がちゃんと定まる.
元の数がp個の体

$$\mathbb{F}_p = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{p-2}, \overline{p-1}\}$$

が存在する.

参考

$p=5$のとき$\mathbb{F}_p\setminus\{\overline{0}\}$の乗積表

$\times$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$$\Downarrow$$

3. 各X_pに対して合同ゼータ函数$Z(X_p,t)\in\mathbb{Q}(t)$(すぐ後で定義する)が定まり，オイラー積により

$$\zeta_X(s):=\prod_{p:\text{素数}} Z(X_p,t)|_{t=p^{-s}}$$

と定義する(X_pが定まらない有限個の素数についてもp-因子の適当な定義あり).

●「函数等式」,「整数点での値$\zeta_X(m)$に潜む意味」や「リーマン予想」も期待されているがまだ一般解決には遠いのが現状である.

● $X=\{1\text{点}\}\Longrightarrow Z(X_p,t)=\dfrac{1}{1-t}$

$$\Longrightarrow \zeta_X(s)=\zeta(s)$$

有限体について

有限個の元のみからなる体を有限体とよぶ.

(i) Fが有限体とするとある素数pとその巾p^mが存在してFの位数はp^mとなる．このとき，Fにおいては$p \cdot a = a + \cdots + a$($p$回足す) $= 0$ となる.

(ii) 逆に，各素数巾p^mごとに位数p^mの有限体$\mathbb{F}_{p^m}$が存在して一意的である.

(iii) Frobenius写像$\mathrm{Fr}(x) = x^p$ と定めると，Frは体$\mathbb{F}_{p^m}$の自己同型になる．実際，2項係数${}_pC_i$はpで割り切れることより$(x+y)^p = x^p + y^p$である.

(iv) $m|m' \iff \mathbb{F}_{p^m} \subset \mathbb{F}_{p^{m'}}$であり，$\mathbb{F}_{p^{m'}}$ の中で$\mathbb{F}_{p^m}$の特徴づけは

$$\mathbb{F}_{p^m} = \{x \in \mathbb{F}_{p^{m'}} | \mathrm{Fr}^m(x) = x\}$$

で与えられる.

$\boxed{\text{合同ゼータ函数}}$

合同ゼータ函数 $Z(X_p, t) \in \mathbb{Q}(t)$ とは次のようにして定まる多項式である.

$$Z(X_p, t) = \exp\left(\sum_{m\geq 1} \frac{\sharp X(\mathbb{F}_{p^m}) t^m}{m}\right)$$

合同ゼータ函数の具体例

1. $X_p = \{1\text{点}\}$ のとき,

任意の m で $\sharp X(\mathbb{F}_{p^m}) = 1$ より,

$$\begin{aligned} Z_p(X, t) &= \exp\left(\sum_{m\geq 1} \frac{t^m}{m}\right) \\ &= \exp(-\log(1-t)) = \frac{1}{1-t} \end{aligned}$$

2. $X_p = \mathbb{P}^n$ のとき,
$\sharp\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \coprod \mathbb{A}^{n-1} \coprod \cdots \coprod \mathbb{A}^1 \coprod \{1\text{点}\}$ より,

$$Z_p(X_p, t) = \exp\left(\sum_{m\geq 1} \frac{(1 + p^m + \cdots + p^{mn})t^m}{m}\right)$$
$$= \exp(-\sum_{i=1}^{n} \log(1 - p^i t))$$
$$= \frac{1}{(1-t)(1-pt)\cdots(1-p^n t)}$$

3. X_p が種数 g の非特異射影代数曲線のとき,

$$Z(X_p, t) = \frac{P_1(t)}{(1-t)(1-pt)}$$

と表せる.
但し, $P_1(t)$ は $2g$ 次の整数係数のモニック多項式.
$P_1(t) = 0$ の根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{2g}$ は複素数として常に複素絶対値 $p^{-1/2}$ をもつ.
(Weil, 1940頃)

$\boxed{\text{Weil予想}}$

X_pを$\mathbb{F}_p$上のn次元非特異射影代数多様体とする.
さらにX_pが$\mathbb{Q}$の上の非特異射影代数多様体のp還元として得られているとしておく

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & X(\mathbb{C})\text{: 複素多様体} \\ X \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & X_p\text{: } X \text{の} p \text{還元} \end{tikzcd}$$

このとき次のことが成り立つ.

1.有理性

$Z(X_p, t)$は有理式となる.

2.函数等式

$$Z(X_p, 1/p^n t) = \pm p^{n\chi(X_p)/2} t^{\chi(X_p)} Z(X_p, t)$$

($\chi(X_p)$はオイラー標数とよばれる幾何的不変量)

3.幾何的な情報との関係

$Z(X_p,t) = \dfrac{P_1(t)\cdots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)\cdots P_{2n}(t)}$ という分解があり
各$0 \le i \le 2n$において

$$\deg(P_i(t)) = \dim_{\mathbb{Q}} H^i_{\text{Betti}}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$$

なるモニック多項式である.

4.リーマン予想（の類似）

各$0 \le i \le 2n$において$P_i(t) = 0$の全ての根の複素絶対値が$p^{-i/2}$である

Remark

最後の部分を「リーマン予想」と呼ぶ由来は$P_i(t)|_{p^{-s}}$を考えると零点の複素絶対値が$p^{i/2}$であることによる.
特に「リーマン予想」の部分が最もむつかしい部分であった」

Weil予想の歴史

- Artinが特別な代数曲線に対して合同ゼータ函数を定義して「有理性」,「函数等式」,「リーマン予想」等の性質を示す(1920頃?)

- Weilが, 複素数体以外の体での代数幾何学の理論を基礎付けながら一般の代数曲線やアーベル多様体の合同ゼータ函数に対しても同様の性質を示す(1940頃)

- Weilがさらにフェルマー多様体やグラスマン多様体に対しても同様の性質を示して一般の非特異代数多様体の場合の「Weil予想」を提出(1949頃)

- Dworkが「有理性」の部分のみ一般解決(1959頃)

- Grothendieckが, エタールコホモロジーの理論を建設して「リーマン予想」以外のほぼすべてを解決(1960年代)

- Deligneが,「リーマン予想」の部分を解決(1970年代はじめ)

エタール(étale)コホモロジー

Weil予想の証明には, l-進エタールコホモロジーと呼ばれるよいコホモロジー理論を構成することが大事であった.
素数lごとにl-進体と呼ばれる体$\mathbb{Q}_l$がある $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_l$.
pと違う素数lに対するl-進エタールコホモロジー理論は,

$$\{n\text{次元非特異射影多様体}\, X_p\} \mapsto \{H^i_{\text{ét}}(X_p)\}_{0 \le i \le 2n}$$

で次を満たす:

(i) 各$0 \le i \le 2n$に対して, $H^i_{\text{ét}}(X_p)$は有限次元$\mathbb{Q}_l$-ベクトル空間で

$$\dim_{\mathbb{Q}_l} H^i_{\text{ét}}(X_p) = \dim_{\mathbb{Q}} H^i_{\text{Betti}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$$

が成り立つ.

(ii) $\overline{\mathbb{F}}_p = \bigcup_{m \ge 1} \mathbb{F}_{p^m}$ として, X_pの代数多様体としての写像fとしたとき, fは各iでコホモロジーの射

$$f^* : H^i_{\text{ét}}(X_p) \longrightarrow H^i_{\text{ét}}(X_p)$$

を引き起こし, 次の "不動点公式":

$$\sharp\{x \in X_p(\overline{\mathbb{F}}_p) \mid f(x) = x\} = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \mathrm{Tr}(f^*; H^i_{\text{ét}}(X_p))$$

が成り立つ.

(幾何的) フロベニウス写像と呼ばれる写像 $\mathrm{Fr} : X_p \longrightarrow X_p$ で有理点の写像 $X_p(\overline{\mathbb{F}}_p) \xrightarrow{\mathrm{Fr}} X_p(\overline{\mathbb{F}}_p)$ が座標の p-乗写像であるようなものが存在する.

先の有限体に関する事実から

$$\sharp X_p(\mathbb{F}_{p^m}) = \sharp\{x \in X_p(\overline{\mathbb{F}}_p) \mid \mathrm{Fr}^m(x) = x\}$$

がわかる

不動点定理をFr^mに対して用いると

$$
\begin{aligned}
&Z(X_p,t)\\
&=\exp\left(\sum_{m\geq 1}\frac{\sharp X_p(\mathbb{F}_{p^m})t^m}{m}\right)\\
&=\exp\left(\sum_{m\geq 1}\sum_{0\leq i\leq 2n}\frac{(-1)^i\mathrm{Tr}((\mathrm{Fr}^*)^m;H^i_{\text{ét}}(X_p))t^m}{m}\right)\\
&=\prod_{0\leq i\leq 2n}\exp\left(\sum_{m\geq 1}\frac{\mathrm{Tr}((\mathrm{Fr}^*)^m;H^i_{\text{ét}}(X_p))t^m}{m}\right)^{(-1)^i}
\end{aligned}
$$

各$0\leq i\leq 2n$において,

$h^i=\dim_{\mathbb{Q}_l}H^i_{\text{ét}}(X_p)$

$\alpha_1,\cdots,\alpha_{h^i}$を$H^i_{\text{ét}}(X_p)\curvearrowleft\mathrm{Fr}$の固有値

$P_i(t)=\det(1-(\mathrm{Fr})^*t;H^i_{\text{ét}}(X_p))$: 固有多項式

とすると

先の式

$$= \prod_{0\le i\le 2n} \exp\left(\sum_{m\ge 1} \frac{\mathrm{Tr}((\mathrm{Fr}^*)^m; H^i_{\text{ét}}(X_p))t^m}{m}\right)^{(-1)^i}$$

$$= \prod_{0\le i\le 2n} \prod_{1\le j\le h^i} \exp\left(\sum_{m\ge 1} \frac{\alpha_j^m t^m}{m}\right)^{(-1)^i}$$

$$= \prod_{0\le i\le 2n} \prod_{1\le j\le h^i} \left(1-\alpha_j t\right)^{(-1)^i}$$

$$= \frac{P_1(t)\cdots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)\cdots P_{2n}(t)}$$

かくしてエタールコホモロジーが構成された帰結として「リーマン予想」以外の大半が言えた事になる.

「リーマン予想」がいえるには
各$0 \leq i \leq 2n$に対して，$H^i_{\text{ét}}(X_p) \curvearrowleft \mathrm{Fr}$の固有値はみな複素絶対値$p^{-i/2}$をもつことが言えればよい．

GrothendieckはX_pの中の部分代数多様体の分布と絡み具合に関する「モチーフの理論」や「スタンダード予想」といった広大な予想を打ち出してそれらの予想から「リーマン予想」が従うことを示した． 「モチーフの理論」や「スタンダード予想」は代数幾何における変革的な構想であるが未だ解決からは遠い予想である．

Deligneは代数多様体の族や退化に関する理論を巧みに組み合わせることや保形関数の理論からの発想を活かしたアイデアによって「スタンダード予想」を回避して「リーマン予想」を証明した．

DeligneによるWeil予想の完全解決の後も別証明や表現論などへの応用など研究の流れは続いている．