

書 評

Jan Nekovář: Selmer complexes

Astérisque, Société Mathématique de France, 2006 年, 559 ページ.

落 合 理

本書のテーマを一言で言うと、岩澤理論の代数的側面の主人公である「Selmer 群」を導来圏の道具立ての助けを借りて「Selmer 複体」へ一般化する試論である。非常に大部なページ数にも関わらず、岩澤理論とは何か（あるいは何であるべきか）ということに関してはほとんど書かれておらず、教科書というよりは論文である。この本の Introduction (27 頁ほどの分量からなる Chapter 0) で、筆者なりに説明を試みているが、双対関係と導来圏の対象の図式が踊る中に岩澤理論の内容と目的意識が本当に読み取れる読者は、かなりの専門家のみかもしれない。したがって本書評では、この研究内容と背景の説明にある程度の重さを課さねばならない。

さて、Selmer 群はガロア表現やガロア表現の族が与えられたときに定まる大切な群である。代数体 F と代数体 F の絶対ガロア群 G_F が連続作用する加群 M があるとき、 M に付随した Selmer 群 $\mathrm{Sel}_M(F)$ はガロアコホモロジー $H_{\mathrm{gal}}^1(F, M)$ の各素点 v で適当な局所条件を満たすコサイクルからなる部分群として定義される。局所条件の選び方によって Greenberg の Selmer 群 $\mathrm{Sel}_M^{\mathrm{Gr}}(F)$ 、Bloch-Kato の Selmer 群 $\mathrm{Sel}_M^{\mathrm{BK}}(F)$ などの流儀があり、それぞれに利点や欠点がある。正確に状況設定をすると話が込み入って全体像が見えにくくなるので、若干不正確になることを承知で、どの Selmer 群をとるかを敢えて曖昧にして、代数体 F の絶対ガロア群 G_F が連続作用する加群 M に対する Selmer 群を $\mathrm{Sel}_M(F)$ と記す。 F が有限次代数体のとき、次の例 (Cl), (Ellip) が最も基本的である。

(Cl) $M = \mu_{p^\infty}$ ならば以下の拡大が存在する (但し、 $r_F^\times$ は F の単数群、 Cl_F は F のイデアル類群):

$$0 \longrightarrow r_F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathrm{Sel}_M(F) \longrightarrow \mathrm{Cl}_F[p^\infty] \longrightarrow 0.$$

(Ellip) $M = E[p^\infty]$ (F 上の楕円曲線 E の p べき等分点からなるガロア加群) ならば以下の拡大が存在する (但し、 $\mathrm{III}_{E/F}$ は E の Tate-Shafarevich 群):

$$0 \longrightarrow E(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathrm{Sel}_M(F) \longrightarrow \mathrm{III}_{E/F}[p^\infty] \longrightarrow 0.$$

両方の例により、Selmer 群は大切な情報を含んだ群であることがわかる。一般に幾何的なガロア表現 M の Selmer 群は M の L 函数 $L(M, s)$ の整数点での特殊値と結びつくという予想が定式化されている。例 (Cl) の M の場合は、 $s = 0$ での特殊値は古典的な Dirichlet の解析的類数公式によって既に確立されており、例 (Ellip) では以下の予想がある (簡単のため、 $F = \mathbb{Q}$ とする)。

BSD 予想 (1) $L(E, s)$ の $s = 1$ での零点の位数 r は $\mathrm{Sel}_M(\mathbb{Q})$ の corank に等しい。¹⁾

$$(2) \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{-r} L(E, s) = \frac{\mathrm{Reg}(E) \cdot \int_{E(\mathbb{R})} \omega_E \cdot |\mathrm{III}_E| \cdot \mathrm{Tam}}{|E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}}|^2}. \quad 2)$$

さて岩澤理論では、ガロア表現 M や定義体 F を個別に考えるのではなく適当なパラメーター空間 (あるいは変形空間) に埋め込んでその p -進変形族を考えることで現れる p -進変形空間上の函数を調

べる。次の2つ変形族の例が最も典型的である。

(Cyc) 絶対ガロア群 G_F が連続作用する離散的 $\mathbb{Z}_p$ 加群 A をとり, F_∞/F を円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とする³⁾. $\mathcal{A} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p[[\text{Gal}(F_\infty/F)]], A)$ を, A の円分変形とよぶ. A の Pontrjagin 双対が有限生成 $\mathbb{Z}_p$ 加群であるとき, $\mathcal{A}$ は, その Pontrjagin 双対が $\mathbb{Z}_p[[\text{Gal}(F_\infty/F)]]$ 加群として有限生成自由となる G_F 加群である. また, $I \subset \mathbb{Z}_p[[\text{Gal}(F_\infty/F)]]$ を augmentation ideal とするとき, $\mathcal{A} = \mathcal{A}[I]$ となる.

(Hida) p での Fourier 係数 $a_p(f)$ が p 進単数となるような (このようなものを ordinary とよぶ) 固有力スブ形式を考える. V_f を Deligne によって構成された f に付随する $G_{\mathbb{Q}}$ のガロア表現とし, $\mathcal{A}_f$ で V_f の lattice T_f による商とする. このとき, 肥田氏によって構成された ordinary ヘッケ環とよばれる環 $\mathbb{H}$ 上の巨大な $G_{\mathbb{Q}}$ -加群 $\mathcal{A}$ があって, $\mathbb{H}$ のあるイデアル I_f に対して, $\mathcal{A}_f = \mathcal{A}[I_f]$ となるとともに $\mathcal{A}$ の Pontrjagin 双対は有限生成自由 $\mathbb{H}$ -加群になる. 肥田のヘッケ環 $\mathbb{H}$ は, 岩澤代数 $\mathbb{Z}_p[[1+p\mathbb{Z}_p]]$ 上有限平坦であり, 簡単のために $\mathbb{H} = \mathbb{Z}_p[[1+p\mathbb{Z}_p]]$ とすると, 単項イデアル $I_k = ([1+p] - (1+p)^{k-2})$ ごとに重さ $k \geq 2$ の ordinary なモジュラー形式 f_k が存在して, $\mathcal{A}_{f_k} = \mathcal{A}[I_k]$ となる. $[1+p]$ は群環の群 $1+p\mathbb{Z}_p$ の中の $1+p$, $(1+p)$ は群環の係数環 $\mathbb{Z}_p$ の中の $1+p$ を表している

さて, Nekovář 氏の Selmer 複体の理論の背後にある動機として, 以下のような岩澤理論または Hasse-Weil L 函数に関する予想がある.

(trivial zero 予想) 重さ 2 でレベルが p で割れる ordinary な eigen cuspform f に対して, Mazur-Tate-Teitelbaum の p 進 L 函数 $L_p(f) \in \mathbb{Z}_p[[\text{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})]] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ を考える. $L_p(f)$ は, $\text{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ の導手 p^r の有限指標 ϕ ごとに

$$\phi(L_p(f)) = \left(1 - \frac{\phi(p)}{a_p(f)}\right) a_p(f)^{-r} G(\phi^{-1}) \frac{L(f \otimes \phi, 1)}{\Omega_f^+}$$

を満たす (Ω_f^+ は f に付随した周期積分, $G(\phi^{-1})$ は Gauss 和を表す). したがって $a_p(f) = 1$ となる f を考えると, $\phi = 1$ のときに因子 $\left(1 - \frac{\phi(p)}{a_p(f)}\right)$ から来る「自明な零点」が生じる. かくして, $L_p(f)$ をある自然に $s \in \mathbb{Z}_p$ 上の函数とみなした $L_p(f, s)$ に対して $s = 1$ での零点の位数 $\text{ord}_{s=1}$ に $\text{ord}_{s=1} L_p(f, s) = \text{ord}_{s=1} L(f, s) + 1$ なる trivial zero 予想が信じられている^{4) 5)}.

(偶奇予想) 勝手な重さ $k \geq 2$ の固有力スブ形式 f に付随したヘッケ L 函数 $L(f, s)$ の $s = \frac{k}{2}$ での零点の位数と f の Selmer 群 $\text{Sel}_{A_f}(\mathbb{Q})$ の corank が mod 2 で一致する. (一般化された BSD 予想は $L(f, s)$ の $s = \frac{k}{2}$ での零点の位数と f の Selmer 群 $\text{Sel}_{A_f}(\mathbb{Q})$ の corank は一致すると予想しており, 偶奇予想は一般化された BSD 予想から従うより弱い予想である)

本書の理論では, trivial zero の現象と相性の良い岩澤理論の設定を探したり, 偶奇予想を解決することを目的としている. まず本書の内容を無理やり次の6つのテーマに分けるとともにざっと中身を紹介する.

1. 代数的な準備 (Chapter 1–5)
2. Selmer 複体の導入 (Chapter 6,7)
3. $\mathbb{Z}_p^d$ -拡大の岩澤理論の結果 (Chapter 8,9)
4. Cassels-Tate pairing の構成 (Chapter 10)
5. p -adic height pairing の構成 (Chapter 11)

6. 弱い意味での Birch and Swinnerton-Dyer conjecture への応用 (Chapter 12)

Chapter 1 では、ホモロジー代数の簡単な準備だが、加群のレベルの話ではなく複体レベルのホモロジー代数について要約程度のまとめがある。Chapter 2 では主に n 変数岩澤代数の上の加群において現れる 3 つの可換論的な双対性 (Matlis duality, Grothendieck duality, local duality) を導入しそれらの間の比較関係、更に局所コンパクト位相群とみたときの Pontrjagin 双対性との比較についても説明がある。Chapter 3, 4 では、剰余体が無限体であったり Krull 次元が大きかったりする係数環上のガロア加群に対して、ガロアコホモロジーの有限生成条件に名前をつけたり整理をして後のための準備を与えている。また、連続なコサイクルをもつガロアコホモロジーと普通の導来関手によるコホモロジーとの関係に関する種々の性質が論じられている。Chapter 5 は、ガロアコホモロジーにおける双対定理にあてられている。通常の (加群のレベルでの) 双対定理を簡単に振り返り、複体のレベルでの定理が非常に細かく網羅されている。Chapter 6 で、やっとこの本のテーマである Selmer 複体が登場する。 R を考えるべき変形環として、 $R[G_F]$ 加群の複体 X が与えられたとする。 F の p 上の素点、無限素点、分岐素点を全て含む、 F の素点の有限集合 S に対して、各素点 $v \in S$ でのコチェイン複体 $C(G_v, X)$ の部分複体 $U(X)_v$ の集まり $U(X) = (U(X)_v)_v$ を指定する (G_v は v での分解群)。このとき複体

$$\tilde{C}_f(G_{F,S}, X; U(X)) = \text{Cone} \left(C(G_{F,S}, X) \oplus \bigoplus_{v \in S} U(X)_v \longrightarrow \bigoplus_{v \in S} C(G_v, X) \right) [-1]$$

の導来圏 $D(R\text{Mod})$ におけるクラス $\widetilde{\text{R}\Gamma}_f(G_{F,S}, X; U(X))$ を Selmer 複体とよぶ。 Selmer 複体を定義して、functoriality や global duality functor のようなごく基本的な性質を確かめている。しばしば、 $F, S, U(X)$ のとりかたが明らかなきは $\widetilde{\text{R}\Gamma}_f(X)$ と記し、その i 次コホモロジー群を $\tilde{H}_f^i(X)$ で表す。特に $i = 1$ のコホモロジーは普通の Selmer 群の定義にあたり、その意味で Selmer 群の一般化となっている。かくして、局所条件にあたる部分複体 $U(X)_v \rightarrow C(G_v, X)$ を決めたくて Selmer 複体が定義されたようにみえる。ひとつ注意することとして、通常の Selmer 群 $\text{Sel}_M(F) \subset H_{\text{gal}}^1(F, M)$ においては、 $v \nmid p$ なる有限素点では必ず “不分岐部分” $H_{\text{unr}}^1(G_v, M) = H^1(G_v/I_v, M^{I_v})$ をとることを思い出したい ($I_v \subset G_v$ は v における惰性群)。Hochschild-Serre スペクトル系列によって、“不分岐部分”は制限写像 $H^1(G_v, M) \rightarrow H^1(I_v, M)$ の kernel である。ところが、複体のレベルではよい Hochschild-Serre スペクトル系列もなく、そのために Chapter 7 で、「複体」のレベルで “不分岐部分”に相当するものを確立している。かくして、200 ページ近くを経た Chapter 7 までをもってやっと Selmer 複体が定義されたことになる⁶⁾。

Chapter 8 は「Iwasawa theory」と名付けられている。広く岩澤理論においてはガロア群 $\Gamma = \text{Gal}(L/F)$ が $\mathbb{Z}_p^r \times (\text{有限アーベル群})$ となる無限次拡大 L/F を考える。この章ではそのような無限次拡大の中での Selmer 複体の順極限や逆極限の扱い (Shapiro の補題)、制限写像に関する振る舞い (Control 定理)、duality theorem など、Selmer 群のときにも大事であった事柄を Selmer 複体の場合に記している。Chapter 9「Classical Iwasawa theory」は、前節と同様の岩澤理論的設定 $\Gamma = \text{Gal}(L/F)$ に加えて係数環 R が p 進体の整数環 $\mathcal{O}$ である特別な場合に絞っている。岩澤理論では、考えている岩澤代数 $\mathcal{O}[[\Gamma]]$ 上の加群 M が pseudo-null 部分加群という support の余次元が 2 以上の小さな部分加群を含むかがときに大事な問題となる。pseudo-null 部分加群があるとイデアルによる特殊

化など代数的操作を行う時に複雑な寄与を生じて邪魔をしてしまうからである。この章では、 L 上のガロアコホモロジーが $\mathcal{O}[[\Gamma]]$ 加群として pseudo-null 部分加群をもたないための十分条件を与える Greenberg による結果に別証明を与えている。また、ガロアコホモロジーの係数が $\mathbb{Z}_p(1)$ であるときには、Selmer 群はイデアル類群や単数群で記述される。もうひとつ別の話題として、この特別な状況でのイデアル類群の無限次拡大 L/F における順極限と逆極限との関係を記述する岩澤による結果の別証明を与えている。ここで述べた 2 つの結果の別証明たちは、ともに Ext^i , Tor_i , スペクトル系列等のホモロジー代数の言葉を積極的に活用しており、この本のこれまでの流れを活かしたものである。この程度のホモロジー代数で pseudo-null 加群などを調べるアイデアは、それ以前にも散在するがまとまったレファレンスとして有用かもしれない。

この本の中の様々なトピックのうち、Nekovář 自身の仕事として最もオリジナルなものは、最後の Chapter 10, 11, 12 である。Chapter 10 では、一般化された Cassels-Tate pairing を与えている。古典的な Cassels-Tate pairing は、代数体 F 上の楕円曲線 E/F に対して

$$(\ , \) : \mathrm{III}_{E/F}[p^\infty] \times \mathrm{III}_{E/F}[p^\infty] \longrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$$

なるものであり、交代的かつ最大可除部分群が互いの exact annihilater となる。このような pairing の存在により、 $\mathrm{III}_{E/F}[p^\infty]$ の有限性予想が成り立つときには、 $\mathrm{III}_{E/F}[p^\infty]$ の位数が平方数であることであることが従う。Flach は、論文 [1] においてこのような、Cassels-Tate pairing を一般の p 進表現 T へと一般化した。Flach の仕事で T が楕円曲線の Tate 加群であるとき、今までの楕円曲線の Cassels-Tate pairing となる。Nekovář は、一般化をもう一段階進めてガロア表現の係数環が p 進体の整数環 $\mathcal{O}$ の場合だけでなく、 $\mathcal{O}[[X_1, \dots, X_d]]$ などの一般の R の場合を考えた。 ω_R を R の dualizing complex として、 R 加群の複体の射 $\pi : X \otimes X \longrightarrow \omega_R$ で適当な条件を満たすものが与えられたとき、“Cassels-Tate pairing”

$$(\ , \) : \tilde{H}^2(X)_{R\text{-tor}} \otimes \tilde{H}^2(X)_{R\text{-tor}} \longrightarrow H^0(\omega_R) \otimes_R (\mathrm{Frac}(R)/R)$$

が構成され、 $R = \mathcal{O}$ の場合に以前の Flach の pairing との比較定理がある (10.8 節参照)。また、 R が大きな環であるときに、このような pairing が存在して、局所化や特殊化に関してもよい振る舞いをするということが、Chapter 12 における偶奇予想へ応用のために重要である。 R として、肥田変形 (Hida) や anti-cyclotomic 変形の変形環をとるとき、 R の特殊化 $s : R \rightarrow \mathcal{O}$ での Selmer 群 $\tilde{H}^1(X \otimes s(R))$ の $\mathcal{O}$ -corank の偶奇性は s によらずに一定であることがわかる (anticyclotomic deformation の場合は 10.7 節を参照のこと)。Chapter 11 では、 p 進 height pairing の一般化を論じている。復習として、有理数体上の楕円曲線 E に対しては、Neron-Tate の height pairing と呼ばれる非退化な双一次形式

$$\langle \ , \ \rangle_{\mathbb{R}} : E(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \times E(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

が存在し、 $E(\mathbb{Q})$ の生成元を基底としたときの行列の絶対値は $\mathrm{Reg}(E)$ と記される大事な不変量であった。また、本書評の最初で紹介した BSD 予想においても $\mathrm{Reg}(E)$ があらわれたことも思い出してほしい。さて、有理数体上の楕円曲線 E に対して群 $H_f^1(V_p(E)) \cong E(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p$ と予想されている。よって、実数体上の height pairing の p 進類似により、 $H_f^1(V_p(E))$ 上に p -adic height pairing を構成する

ことは自然な問題である。この楕円曲線に対する p -adic height pairing は Schneider によって構成され、これを用いて $\text{Reg}(E)$ と同様に定義される不変量 $\text{Reg}_p(E)$ は⁷⁾、 $L(E, s)$ の BSD 予想の類似である p 進 L 函数 $L_p(E, s)$ の p 進 BSD 予想の等式に現れる。楕円曲線に限らない ordinary な p 進表現の Selmer 群に対しても Nekovář 自身や Perrin-Riou らによって p -adic height pairing の構成が一般化された (例えば, [3] などを参照のこと)。さて, Chapter 11 の内容には次の 2 つの新しい意義がある。

(a) 係数環を大きな環にしたときに p -adic height pairing を一般化する。

(b) trivial zero の現象を包括するように p -adic height pairing を一般化する。

まず, (a) では $\Gamma = \text{Gal}(F_\infty/F) \cong \mathbb{Z}_p^\Gamma$ なる適当な拡大 F_∞ を固定するとき, height pairing

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \tilde{H}^1(X) \otimes \tilde{H}^1(X) \longrightarrow H^0(\omega_R) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Gamma$$

を構成する。11.3 において [3] など以前の p -adic height pairing との比較を示している。特に, Γ が rank 1 のとき $\Gamma \cong \mathbb{Z}_p$ を固定することに値は $H^0(\omega_R)$ に入っているとみなせる。(b) に関しては, 本論説の最初に述べた (trivial zero 予想) によって解析的理論においては, p 進 L 函数のランクが増える現象 (trivial zero 現象) がある。もし, p 進 BSD 予想や岩澤主予想などを介して解析的理論と代数的理論が互いに他を反映しあうとしたら, 対応する代数的理論においても同じ現象を勘定に入れた説明がつかないといけない。簡単のため, 考えているモジュラー形式 f が $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E に対応しているとすると, trivial zero 現象がおこるのは E が p で split multiplicative reduction をもつことである。このとき, 楕円曲線 E の p 進表現 $V_p(E)$ に対して

$$\tilde{H}_f^1(V_p(E)) = \begin{cases} H_f^1(V_p(E)) \oplus \mathbb{Q}_p & E \text{ が } p \text{ で split multiplicative reduction} \\ H_f^1(V_p(E)) & \text{それ以外} \end{cases}$$

という関係がある。かくして, 11.4 で説明されているように Selmer 複体 $\tilde{H}_f^1(X)$ 上の p -adic height pairing は以前の p -adic height pairing よりも trivial zero の現象を正しく反映しているというのが Nekovář 氏の宣伝する Selmer 複体の「売り」のひとつである。

Chapter 12 では以前に Nekovář 氏が証明した楕円モジュラー形式に対する (偶奇予想) を, より一般化した総実体 F 上のヒルベルトモジュラー形式 f に対する偶奇予想の形で紹介している。大筋は楕円モジュラーのときと同じアイデアにしたがって得られるが, 楕円モジュラーでは現れなかった新しい技術的問題もある。これらの最も一般な形での結果を論じるのがこの章の目的であり, 主結果は 12.2 にまとめられている。特に正確な結果を知りたい場合は, Theorem 12.2.3 を見られたい。総実体 F の次数が奇数, f の重さはスカラーで偶数, f は p で ordinary, など様々な技術的な条件を仮定したときに f の Selmer 群の corank が $L(f, s)$ の $s = k/2$ での零点の位数と mod 2 で等しいことを主張する定理である。証明のアウトラインは, 12.2 で簡単に説明されているが, その後, 12.3 から 12.9 における長い準備の後 12.10 においてより詳しく正確な証明が述べられる。12.3 から 12.9 の準備の部分は, ヒルベルトモジュラー形式とそのガロア表現, ϵ 因子, Jacquet-Langlands 対応などの非常に正確で網羅的なレファレンスとしても有用かもしれない。一般の総実体 F の場合は非常に複雑な事情が絡むので $F = \mathbb{Q}$ (つまり楕円モジュラー) のときに証明のストーリーを手短かに述べておきたい。与えら

れた勝手な重さ $k \geq 2$ をもつ ordinary なモジュラー形式 f を肥田変形で動かして重さが 2 の場合へともっていき、さらにそれを anticyclotomic 変形で動かす。その際、Cassels-Tate pairing の応用として Selmer 群の rank mod 2 という不変量が一定であることがわかる。一方で、 ϵ 因子の考察から L 関数の零点の位数 mod 2 もこれらの 2 つの変形空間で一定である。今、Cornut, Vatsal の結果から、重さ 2 の ordinary なモジュラー形式を anticyclotomic 変形空間の中で動かしたとき、 L 関数の零点の位数が 1 以下の点が存在することが保証される。 L 関数の零点の位数が 1 以下ならば、Heegner 点の Euler 系の理論から、Selmer 群の rank と L 関数の零点の位数が (mod 2 でなく) 正確に等しい。かくして、全ての ordinary なモジュラー形式 f は「変形空間の中で動かして都合のよい点にもっていく」ことで欲しい偶奇予想が示されるという寸法である。

この本は、イントロの最後に著者が述べているように、岩澤理論を “Grothendieckify” することを意図している。実際にこれだけ長い本となったのは EGA のように正確かつ証明を省かずにかくことを意識したからであろう。ただ、この仕事の最初の動機付けとなった偶奇予想への応用に関しては、Mazur-Rubin, Dokchitser-Dokchitser らの仕事により Selmer 複体とは全く異なる root number の議論を通して強い結果が得られている⁸⁾。そういった意味では、これだけの抽象化の犠牲を払うのに見合う岩澤理論的な意義があるかどうかはわからない⁹⁾。一方で、Nekovář 氏の理解や記述は概して非常に誤りが少ない。既におぼろげながら岩澤理論の一般化のアイデアやガロア表現全般に通じている読者が、本書の 8 章以降で説明されたことがらのいずれかについて調べるといって明確な目的をもって辞書的に使用することも可能かもしれない。

注 釈

- 1) $M = E[p^\infty]$ のときは、 $L(M, s) = L(E, s + 1)$ であることに注意したい。
- 2) $\text{Reg}(E)$, $\int_{E(\mathbb{R})} \omega_E$, Tam は楕円曲線の regulator, 周期積分, 玉河数といった大事な不変量であるが紙数制限もあるので説明はしない。
- 3) 円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 F_∞ とは $F(\mu_{p^\infty})$ の部分体で $\text{Gal}(F_\infty/F) \cong \mathbb{Z}_p$ となる一意的な拡大のことをいう。
- 4) trivial zero 予想は [2] で定式化された予想であり、 $\text{ord}_{s=1} L(f, s) = 0$ かつ $F = \mathbb{Q}$ のときには、Greenberg-Stevens, Kurihara-Kato-Tsuji, Colmez によって独立に証明されている。
- 5) trivial zero がいないときには、 $\text{ord}_{s=1} L_p(f, s) = \text{ord}_{s=1} L(f, s)$ であると予想されているが一般には未解決である。
- 6) p での局所条件は Greenberg 流の Selmer 群における p での局所条件が自然に複体に一般化されるので特別な困難は起こらない。
- 7) $\mathbb{R}$ 上の height pairing とは異なり、 p -adic height pairing の非退化性は一般には難しい未解決問題である。したがって、 $\text{Reg}_p(E) \neq 0$ であることも未解決な

予想であることに注意したい。

- 8) これらの仕事は、楕円曲線やアーベル多様体の「重さ 2」の場合しか扱わないが p での ordinarity の条件は必要としない。
- 9) 非可換岩澤理論や Equivariant Tamagawa Number Conjecture などのコンテキストでこの本の恩恵を受けている仕事もあるようである。評者がこの話題の専門家ではないだけで、複体で考えることを生業にしている専門家にはもっと強く意義が感じられるのかもしれない。

文 献

- [1] M. Flach, *A generalisation of the Cassels-Tate pairing*, J. Reine Angew. Math. 412, 113–127, 1990.
- [2] B. Mazur, J. Tate, J. Teitelbaum, *On p -adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math. 84, no. 1, 1–48, 1986.
- [3] J. Nekovář, *On p -adic height pairings*, In: Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1990–91, 127 – 202, Progr. in Math., 108, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993

(2010 年 9 月 10 日提出)

(落合理・大阪大学)