BEILINSON-加藤の EULER 系

落合理, 小林真一

この原稿は, 玉原数論幾何研究集会 (2011/5/30-6/2) の加藤オイラー系の勉強会のセッションのためのものである[1].

Contents

1. モジュラー形式に付随した L 函数, 複素周期, Selmer 群などについて

定義 1.1. $f \in S_k(\Gamma_1(N))$ を正規化された (つまり, $a_1(f) = 1$ となる) 固有形式とするとき, $\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}(\{a_l(f)\})$ をヘッケ体とよぶ. よく知られた事実として, $\mathbb{Q}_f$ は $\mathbb{Q}$ の有限次拡大となる[2]. $\mathbb{Z}_f$ で $\mathbb{Q}_f$ の整数環を表す.

以下, 奇素数 $p \geq 3$, 埋め込み $\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定する. $\mathcal{K}$ を $\mathbb{Q}_f$ の p 進完備化, $\mathcal{O} \subset \mathcal{K}$ を整数環, $\varpi \in \mathcal{O}$ を素元とする.

定義 1.2. f を重さ $k \geq 2$ の正規化された固有カスプ形式とする. このとき,

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)}{n^s}$$

[1]勉強会はコマ数が限られており論文の一番テクニカルな部分に限られる. かくして, それ以外の応用や全体の俯瞰をまとめたものである. 可能な限り技術的な部分も正確に書くように努めたが, おそらく添え字や概念に関する不正確さや間違いも多々あるかと思われる. また, ストーリーをわかりやすくするために加藤氏の元の論文と少し異なる記号づかいをした部分もある. 正確な情報を必要とする場合は, 必ず元の論文で検証していただきたい. 一方で, 本原稿の中の間違いや改善点がありましたらどうかご指摘いただきたい.

[2]CM 体または総実体となることも知られている.

は, *Deligne* の定理より $\mathrm{Re}(s) > \frac{k+1}{2}$ で絶対収束し, 複素平面全体に解析接続される. この $L(f,s)$ をヘッケの L 函数とよぶ. また, *Dirichlet* 指標 ϕ があると, $L(f,s)$ の ϕ ひねり

$$L(f,\phi,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)a_n(f)}{n^s}$$

が考えられ, 同様に複素平面全体に解析接続される.

定理 1.1 (志村)**.** *f を重さ $k \geq 2$ の正規化された ($a_1(f) = 1$ となる) 固有カスプ形式とする. このとき, $\Omega_f^{\pm} \in \mathbb{C}^{\times}$ が存在して, $1 \leq j \leq k-1$ なる勝手な自然数 j と勝手な Dirichlet 指標 ϕ に対して $\dfrac{L(f,\phi,j)}{\Omega_f^{\pm}(2\pi i)^{j-1}} \in \mathbb{Q}_f[\phi]$ となる ($\pm = (-1)^{j-1}\phi(-1)$ である).*

定義 1.3. 上のような $\Omega_f^{\pm} \in \mathbb{C}^{\times}$ を f の複素周期という.

周期には標準的な取り方はなく, $\mathbb{Q}_f^{\times}$ 倍のあいまいさがある. しかしながら, 素数 p と f の p 進表現 V_f の lattice を選ぶと, 周期の p-optimal な正規化がある. 以後, 素数 p, $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$, 埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ を固定する.

定理 1.2 (Deligne-志村)**.** *f を重さ $k \geq 2$ の正規化された固有カスプ形式とする. $G_{\mathbb{Q}}$ のガロア表現 $V_f \cong \mathcal{K}^{\oplus 2}$ が存在して, $G_{\mathbb{Q}}$ の作用 ρ_f は次の条件を満たす.*

(i) ρ_f は連続かつ Mp の外不分岐.

(ii) 勝手な素数 $l \nmid Mp$ に対して, $\mathrm{Tr}(\rho_f(\mathrm{Frob}_l)) = a_l(f)$ が成り立つ (但し, Frob_l は幾何的フロベニウス元).

(iii) ρ_f は既約表現.

適当なアファインモジュラー曲線 Y と勝手な可換環 R に対して, $\mathcal{H}_R^1$ を, Y 上にある楕円曲線の族 $\mathcal{E}$ のコホモロジー群 $H^1(\mathcal{E}_x, R)$ から定まる局所系とする. $H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(N), \mathrm{Sym}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathbb{Z}_{f,(p)}})^{\pm}[\pi_f]$ は階数 1 の自由 $\mathbb{Q}_f$ 加群である (但し, $[\pi_f]$ なる記号は全てのヘッケ作用素 T に対する $T - T(f)$ の kernel の共通部分を取り出すことを意味する).

固定された p 進埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ $\mathbb{Z}_f$ 上に一意的な p 進付値がひきおこされ, その付値による局所化を $\mathbb{Z}_{f,(p)}$ と記す. $\mathbb{Z}_{f,(p)}$ は DVR である.

定義 1.4. *T を V_f の lattice とする. $b^{\pm}$ を階数 1 の自由 $\mathbb{Z}_{f,(p)}$ 加群*

$$H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(M), \mathrm{Sym}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathbb{Q}_f})^{\pm}[\pi_f] \cap T$$

の $\mathbb{Z}_{f,(p)}$ 基底とする[3]*. p-optimal な複素周期 $\Omega_T^{\pm}$ を Betti-de Rham pariring の値*

$$\Omega_T^{\pm} = \langle b^{\pm}, f \rangle$$

で定める. (本当は, $\Omega_T^{\pm}$ は, $b^{\pm}$ に依存するが, 誤解のおそれがなければ notation に $b^{\pm}$ は入れない.).

p-optimal な複素周期 $\Omega_T^{\pm}$ は, $(\mathbb{Z}_{f,(p)})^{\times}$ 倍のあいまいさをもつ. かくして

$$\mathrm{ord}_{\varpi} \frac{L(f,\phi,j)}{\Omega_T^{\pm}(2\pi\sqrt{-1})^{j-1}}$$

が well-defined である.

[3] 共通部分は $H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(M), \mathrm{Sym}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathcal{K}})^{\pm}[\pi_f]$ の中でとっているとみなす.

定義 1.5. V を $G_{\mathbb{Q}}$ の p 進ガロア表現とし, $T \subset V$ をその *lattice* とする. K を代数体とするとき, *Selmer* 群は

$$\mathrm{Sel}_{T\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}(K) = \mathrm{Ker}\left[H^1(K, T\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \prod_l \frac{H^1(K_v, T\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)}{H^1_f(K_v, T\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)}\right]$$

で定義される. ここで, v が K の素点をわたるときの局所条件 $H^1_f(K_v, T\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ についての説明は（後の理解にあまり本質的でないので）省くが, $v \nmid p$ ではほぼ不分岐部分といわれるものをとっており, $v|p$ では *Bloch*-加藤による *finite part* というものをとっている.

定義 1.6. f を重さ $k \geq 2$ の固有カスプ形式とする. f が虚数乗法をもつとは, $a_l(f) = \delta(l)a_l(f)$ がほとんどすべての l で成り立つような *Dirichlet* 指標 δ が存在することをいう.

Lemma 1.1.
1. f を重さ $k \geq 2$ の固有カスプ形式とする. このとき,「f が虚数乗法をもたない」ことと「ρ_f の像が $SL_2(\mathcal{O})$ のある開部分群を含む」ことは同値である.
2. f を重さ $k \geq 2$ の固有カスプ形式とする. f が指標 δ によって虚数乗法をもつときは必ず δ はある虚 *2* 次体 K に付随した *2* 次指標 δ_K である

2. 主結果の紹介

定理 2.1 (主定理 A)**.** $f \in S_k(\Gamma_1(M))$ を虚数乗法をもたない重さ $k \geq 2$ の固有カスプ形式とする. $1 \leq j \leq k-1$ を満たす自然数 j, V_f の *lattice* T を選ぶとき次が成り立つ.
1. $L(f,j) \neq 0$ ならば, *Selmer* 群 $\mathrm{Sel}_{T(j)\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q})$ は有限群となる.
2. さらに, 条件

   (SL) $\rho_f :\ G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}V_f \cong GL_2(\mathcal{O})$ の像が $SL_2(\mathcal{O})$ を含む

   を仮定し[4], $p > k$, $(M,p) = 1$ とすると,

   $$\mathrm{length}_{\mathcal{O}}\mathrm{Sel}_{T(j)\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}) \leq \mathrm{ord}_{\varpi}\frac{L(f,j)}{\Omega_T^{\pm}(2\pi\sqrt{-1})^{j-1}}$$

   が成り立つ.

この定理の岩澤理論的な variant がすぐ後で述べる定理 2.3 である.

定義 2.1. $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})]] = \varprojlim_n \mathcal{O}[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^n})/\mathbb{Q})]$ を岩澤代数とよぶ.

次のような p 進 L 函数の存在定理が知られている.

定理 2.2 (Mazur-Tate-Teitelbaum)**.** f を重さ $k \geq 2$ の *p-stabilized* な固有カスプ形式とする. また, f は p で *ordinary*
(つまり, $a_p(f)$ が p 進単数) とする. このとき, *p-optimal* な複素周期 $\Omega_T^{\pm}$ を選ぶごとに $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})]] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ の元 $L_p(\Omega_T^{\pm})$ で補間性質*:*

$$\chi_{\mathrm{cyc}}^j\phi(L_p(\Omega_T^{\pm})) = (-1)^{j-1}(j-1)!\left(1 - \frac{\phi(p)p^{j-1}}{a_p(f)}\right)\left(\frac{p^{j-1}}{a_p(f)}\right)^{c(\phi)} G(\phi^{-1})\frac{L(f,\phi,j)}{\Omega_T^{\pm}(2\pi\sqrt{-1})^{j-1}}$$

を満たすものが (一意に) 存在する. 但し, j は $1 \leq j \leq k-1$ なる整数をうごき, ϕ は $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})$ の位数有限の指標をうごく. また, $c(\phi) = \mathrm{ord}_p\mathrm{Cond}(\phi)$, $G(\phi^{-1})$ は *Gauss* 和を表す. 周期に現れる符号 $\pm$ は $(-1)^{j-1}\phi(-1)$ で与えられる.

[4] **(Ir)**は f が non-Eisenstein mod ϖ であることと同値

さらに, f が *non-Eisenstein mod* ϖ ならば $L_p(\Omega^{+}_{T,(p)}) \in \mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})]]$ となる.

定理 2.3 (主定理 B)**.** f を虚数乗法をもたない重さ $k \geq 2$ の *p-stabilized* な固有カスプ形式とする. また, f は p で *ordinary* とする. T をガロア表現 V_f の *lattice* とする. このとき, $\mathrm{Sel}_{T\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))$ の *Pontrjagin* 双対 $\mathrm{Sel}_{T\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee$ はねじれ $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})]]$ 加群となる. また, ある非負整数 m が存在して,

$$\mathrm{char}_{\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})]]}\mathrm{Sel}_{T\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee \supset (\varpi^m L_p(\Omega^{\pm}_T))$$

が成り立つ. さらに, 条件 (SL) を仮定すると, $m=0$ ととれる.

3. Beilinson-加藤元の構成と性質

3.1. **モチビックゼータ元の構成とその性質 (津嶋氏の担当部分).** まずモジュラー曲線の K_2 によい元を構成することが最初のステップである. 自然数 M, L に対して,

$$\Gamma(M,L) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \middle| a \equiv 1, b \equiv 0 \pmod{M}, c \equiv 0, d \equiv 1 \pmod{L} \right\}$$

と定義する. $\Gamma(M,L)$ に対して, モジュラー曲線 $Y(M,L)$ 及び普遍楕円曲線 $p : \mathcal{E} \longrightarrow Y(M,L)$ がある (但し, $M+L \geq 5$ を仮定する).

定理 3.1 (加藤論文 Prop. 1.3)**.** 一般に, スキーム S の上の楕円曲線 $\mathcal{E}$ があるとき, $(c,6)=1$ なる c に対して次の 2 条件をみたす ${}_c\theta \in \Gamma(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}[c], \mathcal{O}^\times)$ が一意に存在する.

1. ${}_c\theta$ の因子が $c^2(0_{\mathcal{E}}) - \mathcal{E}[c]$ となる.
2. 勝手な自然数 a に対して $N_a : \Gamma(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}[ac], \mathcal{O}^\times) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}[c], \mathcal{O}^\times)$ をノルム写像とすると, $N_a({}_c\theta) = {}_c\theta$ が成り立つ.

$Y(M,L)$ 上の直線束 ω を $p_*\Omega^1_{\mathcal{E}/Y(M,L)}$ で定める.

注意 3.1. $D^{r-1}\mathrm{dlog}{}_c\theta \in \Gamma(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}[c], \omega^{\otimes r})$ の適当なねじれ元 $(\alpha,\beta) \in \Gamma(Y(M,L), \mathcal{E}_{\mathrm{tor}})$ による引き戻しは, すぐ後で導入する重さ r の *Eisenstein* 級数 ${}_cE^{(r)}_{\alpha,\beta}$ に等しい.

定義 3.1. $(c,6M)=1$, $(c',6L)=1$ とする. ${}_{c,c'}z^{\mathrm{mot}}_{M,L} \in K_2(Y(M,L))$ を $\{{}_cg_{1/M,0}, {}_{c'}g_{0,1/L}\}$ で定める.

定理 3.2 (加藤論文 Prop. 2.3)**.** $M|M'$, $L|L'$ かつ $\mathrm{prime}(M) = \mathrm{prime}(M')$, $\mathrm{prime}(L) = \mathrm{prime}(L')$ を仮定するとき,

$$K_2(Y(M',L')) \longrightarrow K_2(Y(M,L))$$

において ${}_{c,c'}z^{\mathrm{mot}}_{M',L'}$ は ${}_{c,c'}z^{\mathrm{mot}}_{M,L}$ に写される.

定理 3.3 (加藤論文 Prop. 2.4)**.** $(q,M)=1$ なる素数 q をとる.

$$K_2(Y(qM,qL)) \longrightarrow K_2(Y(M,L))$$

を考える.

1. $(q,L)=1$ ならば ${}_{c,c'}z^{\mathrm{mot}}_{qM,qL}$ は $\left(1 - T'(q)\begin{pmatrix} 1/q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^* + \begin{pmatrix} 1/q & 0 \\ 0 & 1/q \end{pmatrix}^* q\right){}_{c,c'}z^{\mathrm{mot}}_{M,L}$ に写される.
2. $q|L$ ならば ${}_{c,c'}z^{\mathrm{mot}}_{qM,qL}$ は $\left(1 - T'(q)\begin{pmatrix} 1/q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^*\right){}_{c,c'}z^{\mathrm{mot}}_{M,L}$ に写される.

3.2. **ド・ラーム的ゼータ元の定義と Zeta value formula の定式化 (阿部氏の担当部分).** 加藤論文ではゼータモジュラー形式と呼ばれ, ゼータ元のド・ラーム実現の役割を演じる ${}_{c,c'}z^{\mathrm{dR}}_{M,L}(j,k) \in M_k(\Gamma(M,L)) \subset H^1_{\mathrm{dR}}(Y(M,L),\omega^{\otimes k})[j]$ を

$$ {}_{c,c'}z^{\mathrm{dR}}_{M,L}(j,k) = (-1)^j(k-1)!M^{j-k}L^{-j}{}_cE^{(k-j)}_{1/M,0}{}_{c'}E^{(j)}_{0,1/L} $$

で定める. 但し, $r \geq 1$, $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$ に対して

$$ {}_cE^{(r)}_{\alpha,\beta}(\tau) = c^2E^{(r)}_{\alpha,\beta}(\tau) - c^rE^{(r)}_{c\alpha,c\beta}(\tau) $$
$$ E^{(r)}_{\alpha,\beta}(\tau) = (-1)^r(r-1)!(2\pi\sqrt{-1})^{-r}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}\frac{1}{(\widetilde{\alpha}+\tau\widetilde{\beta}+m\tau+n)^r} $$

とする[5]. $(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) \in \mathbb{Q}^2$ は $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$ の持ち上げとする.

m, p^n, A, N をとり $M = mp^nA$, $L = mp^nAN$ とおく. 自然数 a(の mod A での剰余類) を与えたとき, モジュラー曲線の写像

$$ Q_{a(A)}:\ Y(mp^nA, mp^nAN)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow Y_1(Np^{n_1})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\mu_{mp^{n_0}})\ \ (n_0, n_1 \leq n) $$

を上半平面の写像 $\mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H}$, $\tau \mapsto \frac{\tau+a}{A}$ が引き起こすモジュラー曲線の写像 $Y(M,L)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow Y(M,L)_{\mathbb{Q}}$ と通常のトレース写像 $Y(M,L)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow Y_1(Np^{n_1})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\mu_{mp^{n_0}})$ との合成とする. ${}_{c,c'}z^{\mathrm{dR}}_{N,a(A)}(j,k) \in H^1_{\mathrm{dR}}(Y_1(Np^{n_1})_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Q}(\mu_{mp^{n_0}}),\omega^{\otimes k})[k-j]$ を ${}_{c,c'}z^{\mathrm{dR}}_{M,L}(j,k)$ の $Q_{a(A)}$ によるノルム写像の像とする.

$Y(M,L)$ 型のモジュラー形式から通常の $Y_1(N)$ 型のモジュラー曲線に「トレース写像で落とす」操作や, それに伴うゼータモジュラー形式への操作については加藤論文の §5 を参照のこと. しかしながら, $Y_1(N)$ 型のモジュラー曲線に「落とす」際に (単にトレース写像を考えるだけでなく) 余計なパラメーター a mod A などを動かす修正もあり, 一見理解しにくい複雑さが加わっている. 加藤論文の Thm. 12.5, 12.6 及び 13.9 節から 13.13 節で説明されているが, 加藤 Euler 系は本来 Rankin-Selberg 型の志村型複素周期と相性がよいために, それを一般化された BSD 予想と相性のよいモジュラーシンボル周期に関係づける際にこのような修正が必要となることに注意したい.

周期写像:

$$ \mathrm{per}^{\pm}:\ H^1_{\mathrm{dR}}(Y_1(Np^{n_1}),\omega^{\otimes k})[k-j] \longrightarrow H^1_{\mathrm{Betti}}(Y_1(Np^{n_1}),\mathrm{Sym}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathbb{C}}) $$

を思い出そう. 像の空間には, 相対楕円曲線のコホモロジーの基底 e_1, e_2 とモジュラー曲線上の自然なパス $[0,\sqrt{-1}\infty]$ から定まる (ものを若干 $a(A)$ のひねりの分だけ修正した) 元 $b_{a(A)}(j,k)$ がある. 加藤論文 4.7, 4.8 を参照のこと[6]. 以上の準備の下で次の定理が定式化される.

定理 3.4 (加藤論文 Thm. 6.6 (1))**.**

$$ \mathrm{per}^{\pm}({}_{c,c'}z^{\mathrm{dR}}_{Np^{n_1},a(A)}(j,k)[\pi_{\overline{f}}]) = (c^2-c^{k-j})(c'^2-c'^j)L(f,j)(2\pi\sqrt{-1})^{k-j-1}\cdot b_{a(A)}(j,k)[\pi_{\overline{f}}] $$

3.3. **Zeta value formura の証明 (原氏の担当部分).** 定理 3.4(加藤論文の定理 6.6. (1)) を証明するために

$$ \text{Prop. 7.7} + \text{Prop. 7.14} \Rightarrow \text{Thm. 7.12} \Rightarrow \text{Thm. 4.6} \Rightarrow \text{Thm. 5.6 (2)} \Rightarrow \text{Thm. 6.6 (1)} $$

という道筋を通る (上の定理と命題は加藤論文の中の番号付けを指している).

[5] $(\alpha,\beta)=(0,0)$ や $r=2$ のときの $E^{(r)}_{\alpha,\beta}(\tau)$ は若干の修正を要する. 修正に関しては加藤論文 3.4 節あたりを参照のこと.

[6] 加藤論文では記号として b ではなく δ を用いている.

3.4. **エタールゼータ元のひねりと dual exponential map の計算 (特に (IV) の部分の周辺が宮谷氏, 大久保氏の担当部分).**

(I) Chern 類写像 $K_2(Y(M,L)_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow H^2_{\mathrm{et}}(Y(M,L)_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_p(2))$ がある．これによる ${}_{c,c'}z^{\mathrm{mot}}_{M,L} \in K_2(Y(M,L)_{\mathbb{Q}})$ の像を ${}_{c,c'}z^{\mathrm{et}}_{M,L}(2,2)$ であらわす．

(II) Hochschild-Serre スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}, H^q_{\mathrm{et}}(Y(M,L)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}_p) \Longrightarrow E^{p+q} = H^{p+q}_{\mathrm{et}}(Y(M,L)_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_p)$$

を考えると, $Y(M,L)_{\mathbb{Q}}$ はアファイン曲線であることから $q \geq 2$ ならば $E_2^{p,q} = 0$ となる．また, $p > 2$ であることから $p \geq 3$ ならば $E_2^{p,q} = 0$ となる．よって,

$$H^2_{\mathrm{et}}(Y(M,L)_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_p(2)) \longrightarrow H^1_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}, H^1_{\mathrm{et}}(Y(M,L)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}_p(2)))$$

がある． これによる ${}_{c,c'}z^{\mathrm{et}}_{M,L}(2,2) \in H^2_{\mathrm{et}}(Y(M,L)_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_p(2))$ の像を, (記号の乱用ではあるが)${}_{c,c'}z^{\mathrm{et}}_{M,L}(2,2) \in H^1_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}, H^1_{\mathrm{et}}(Y(M,L)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}_p(2)))$ であらわす．

(III)

$$\begin{aligned}\mathrm{Tw}_{j,k}:\ & \varprojlim{}_n H^1_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}, H^1_{\mathrm{et}}(Y(Mp^n, Lp^n)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}_p(2))) \\ & \xrightarrow{\otimes e_1^{k-2} \otimes (\varprojlim \zeta_{p^n})^{k-j-2}} \varprojlim{}_n H^1_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}, H^1_{\mathrm{et}}(Y(Mp^n, Lp^n)_{\overline{\mathbb{Q}}}, (\mathrm{Sym}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathcal{O}})(k-j)))\end{aligned}$$

を考える．$\mathrm{Tw}_{j,k}\left(\varprojlim{}_n {}_{c,c'}z^{\mathrm{et}}_{Mp^n,Lp^n}(2,2)\right)$ を $n=0$ に落としたものを,

$${}_{c,c'}z^{\mathrm{et}}_{M,L}(j,k) \in H^1_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}, H^1_{\mathrm{et}}(Y(M,L)_{\overline{\mathbb{Q}}}, (\mathrm{Sym}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathcal{O}})(k-j)))$$

で記す．

(IV) 加藤論文の技術的に最も大事な部分は, 本来 non-critical な特殊値と関係していた Beilinson 元を (III) のように無理やりに critical な特殊値と関係すべきひねりに移したとき, 実際それが critical な特殊値で書けるということを示す部分である．一般に $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現 V に対して, $H^1_f(\mathbb{Q}_p, V)$ を Bloch-加藤の finite part, $H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, V) = \dfrac{H^1_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}_p, V)}{H^1_f(\mathbb{Q}_p, V)}$ で定め, V がもともと $G_{\mathbb{Q}}$ の作用をもつとき, loc_p を

$$\mathrm{loc}_p : H^1_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}, V) \longrightarrow H^1_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}_p, V) \longrightarrow H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, V)$$

で定める．

explicit reciprocity law を用いて, Bloch-加藤の dual exponential map:

$$\begin{aligned}\exp^* : & H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, H^1_{\mathrm{et}}(Y(M,L)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, (\mathrm{Sym}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathcal{O}})(k-j)) \\ & \longrightarrow \mathrm{Fil}^0 \longrightarrow D_{\mathrm{dR}}(H^1_{\mathrm{et}}(Y(M,L)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, (\mathrm{Sym}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathcal{O}})(k-j)))\end{aligned}$$

に対して $\exp^*(\mathrm{loc}_p({}_{c,c'}z^{\mathrm{et}}_{M,L}(j,k))) = {}_{c,c'}z^{\mathrm{dR}}_{M,L}(j,k)$ が成り立つことが示される (加藤論文の Thm 9.5, Thm 9.6, Thm 9.7 および §10 を参照のこと)．

(V) 先に考えた

$$Q_{a(A)}:\ Y(mp^nA, mp^nAN)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow Y_1(Np^{n_1})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\mu_{mp^{n_0}}) \ \ (n_0, n_1 \leq n)$$

によって ${}_{c,c'}z^{\mathrm{et}}_{mp^nA,mp^nAN}(j,k)$ のノルムをとったものを

$${}_{c,c'}z^{\mathrm{et}}_{Np^{n_1},a(A)}(j,k)_{mp^{n_0}} \in H^1_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}(\mu_{mp^{n_0}}), H^1_{\mathrm{et}}(Y_1(Np^{n_1})_{\overline{\mathbb{Q}}}, (\mathrm{Sym}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathcal{O}})(k-j)))$$

で記す. $f \in S_k(\Gamma_1(Np^{n_1}))$ をヘッケ固有形式とするとき,

$$H^1_{\mathrm{et}}(Y_1(Np^{n_1})_{\overline{\mathbb{Q}}}, (\mathrm{Sym}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathcal{O}})(k-j)) \longrightarrow H^1_{\mathrm{et}}(X_1(Np^{n_1})_{\overline{\mathbb{Q}}}, (\mathrm{Sym}^{k-2}j_*\mathcal{H}^1_{\mathcal{K}})(k-j)) \longrightarrow V_f^*(1-j)$$

がある ($\mathcal{K}$ は $\mathrm{Frac}(\mathcal{O})$ をあらわす).

上の写像を介して ${}_{c,c'}z^{\mathrm{et}}_{Np^{n_1},a(A)}(j,k)_{mp^{n_0}}$ の像をとることによって $H^1_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}(\mu_{mp^{n_0}}), V_f^*(1-j))$ の元ができる. 今, lattice $T \subset V_f$ を決めたとき

$$\Omega_T^{\pm} \text{ の choice} \Longleftrightarrow b^{\pm} \in H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(M), \mathrm{Sym}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathbb{Q}_f})^{\pm}[\pi_f] \cap T \text{ の choice}$$

であったことを思い出そう. ${}_{c,c'}z^{\mathrm{et}}_{Np^{n_1},a(A)}(j,k)_{mp^{n_0}}$ の像の ($a(A)$ を動かしたときの) 適当な $\mathbb{Q}_p$ 線型結合をとることで,

$$z(\Omega_T^{\pm}, j)_{mp^{n_0}} \in H^1_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}(\mu_{mp^{n_0}}), V_f^*(1-j))$$

で, $\mathrm{loc}_p(z(\Omega^+_{f,(p)}, j)_1)$ の $\exp^*\ :\ H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, V_f^*(1-j)) \longrightarrow \mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR}}(V_f^*(1-j))$ による像が $M_k(\Gamma_1(Np^{n_1}))[k-j]$ に入り

$$\mathrm{per}^{\pm}(\exp^*(\mathrm{loc}_p(z(\Omega^+_{f,(p)}, j)_1))) = L(f,j) \cdot b^{\pm}$$

となるものが存在する.

4. 主結果の証明

定義 4.1. Σ をガロア表現 T の分岐素数や p を含む素数の有限集合とする.

$$\mathcal{S} = \{m : \text{平方因子をもたない自然数} \mid (m,q) = 1\ \forall q \in \Sigma\}$$

とする. $T^*(1)$ のガロアコホモロジーの元の系 $\{z_m \in H^1(\mathbb{Q}_\Sigma(\mu_m)/\mathbb{Q}(\mu_m), T^*(1))\}_{m\in\mathcal{S}}$ で, $P_q(X) = \det(1 - \mathrm{Frob}_q X; T^*(1))$ を用いて

$$N_{\mathbb{Q}(\mu_{mq})/\mathbb{Q}(\mu_m)} z_{qm} = P_q(\mathrm{Frob}_q) z_m$$

が成り立つものを *Euler* 系という ($\mathbb{Q}_\Sigma$ は $\Sigma \cup \{\infty\}$ の外不分岐な最大のガロア拡大をあらわす).

津島氏の部分でも得られていた Beilinson-加藤元の満たすノルム系の性質 (加藤論文 Prop. 2.4 を参照) より, Beilinson-加藤元は Euler 系のノルム条件を満たすことがわかる.

定理 4.1. $f \in S_k(\Gamma_1(Np^{n_1}))$ とする. *lattice* $T \subset V_f$, $1 \leq j \leq k-1$ なる自然数 j を選ぶ.

このとき, 非負整数 $a \in \mathbb{Z}$ と *lattice* $T \subset V_f$ の周期 $\Omega_T^{\pm}$ に付随する $\frac{1}{\varpi^a}T^*(1-j)$ に値をもつ *Euler* 系 $\{z_m = z(\Omega_T^{\pm}, j)_m \in H^1(\mathbb{Q}_\Sigma(\mu_m)/\mathbb{Q}(\mu_m), \frac{1}{\varpi^a}T^*(1-j))\}_{m\in\mathcal{S}}$ で

$$\exp^*(\mathrm{loc}_p(z_1)) = \frac{L(f,j)}{\Omega_T^{\pm}} \cdot \overline{f}$$

を満たすものが存在する[7] [8].

また, Euler 系の一般論を階数 2 のガロア表現の場合に思い出す:

定理 4.2. $T \cong \mathcal{O}^{\oplus 2}$ を $G_{\mathbb{Q}}$ の *odd* な階数 *2* のガロア表現し, $\mathrm{rank}_{\mathcal{O}} H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, T^*(1)) = 1$ を仮定する. Σ をガロア表現 T の分岐素数や p を含む素数の有限集合とする. $\{z_m \in H^1(\mathbb{Q}_\Sigma(\mu_m)/\mathbb{Q}(\mu_m), T^*(1))\}_{m \in \mathcal{S}}$ を *Euler* 系とする. 次を仮定する.

(**Unip**) $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(x \neq 0)$ が $\rho\colon\ G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}} T \cong GL_2(\mathcal{O})$ の像に入っている.

(**Nontor**) z_1 が $H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}, T^*(1))$ の $\mathcal{O}$*-torsion* に入らない.

このとき, $b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して

$$\mathrm{length}_{\mathcal{O}} \mathrm{Sel}_{T \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}) \leq b + \mathrm{length}_{\mathcal{O}} H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, T^*(1))/\mathrm{loc}_p(z_1)\mathcal{O}$$

が成り立つ. さらに,

$$(\mathbf{SL})\quad \rho\colon\ G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}} T \cong GL_2(\mathcal{O}) \text{ の像が } SL_2(\mathcal{O}) \text{ を含む.}$$

が成り立てば $b = 0$ ととれる

上の Euler 系の一般論に Beilinson-加藤の Euler 系を適用して証明が得られる.

定理 *2.1* の証明. $f \in S_k(\Gamma_1(M))$, $1 \leq j \leq k-1$ をみたす自然数 j, lattice $T \subset V_f$ を選ぶ. 定理 4.1 より得られる Euler 系 $\{z_m = z(\Omega_T^{\pm}, j)_m \in H^1(\mathbb{Q}_\Sigma(\mu_m)/\mathbb{Q}(\mu_m), \frac{1}{\varpi^a} T^*(1-j))\}_{m \in \mathcal{S}}$ を考える.
(1) を示す.

f が虚数乗法をもたない仮定 $\Longrightarrow$ 定理 4.2 の条件 (**Unip**) が成立.

$L(f,j) \neq 0$ の仮定 $\Longrightarrow$ 定理 4.2 の条件 (**Nontor**) が成立する.

定理 4.2 より

$$\mathrm{length}_{\mathcal{O}} \mathrm{Sel}_{T(j) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}) \leq b + \mathrm{length}_{\mathcal{O}} H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, T^*(1-j))/\mathrm{loc}_p(\varpi^a z_1)\mathcal{O} \tag{1}$$

が成り立つ. よって (1) の証明が終わる.
次に, (2) を示す. 条件(**SL**)より $b = 0$ ととれる. また, 条件(**SL**)より, Beilinson-加藤の Euler 系の分母の指数 a は $a = 0$ ととれる. 上の式 (1) より,

$$\mathrm{length}_{\mathcal{O}} \mathrm{Sel}_{T(j) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}) \leq \mathrm{length}_{\mathcal{O}} H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, T^*(1-j))/\mathrm{loc}_p(z_1)\mathcal{O}$$

が得られる. よって,

$$\mathrm{length}_{\mathcal{O}} H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, T^*(1-j))/\mathrm{loc}_p(z_1)\mathcal{O} = \mathrm{ord}_{\varpi} \frac{L(f,j)}{\Omega_T^{\pm}(2\pi\sqrt{-1})^{j-1}}$$

を示せばよい. 今, $p > k$, $(N,p) = 1$ の仮定と Fontaine-Laffaile 理論より lattice $D \subset \mathrm{D}_{dR}(V_f^*(1-j)) = \mathrm{D}_{crys}(V_f^*(1-j))$ があって,

$$\exp^*\colon\ H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, V_f^*(1-j)) \longrightarrow \mathrm{Fil}^0 \mathrm{D}_{dR}(V_f^*(1-j))$$

---

[7] $f = \sum_n a_n q^n$ とするとき $\overline{f}$ は dual modular form $\sum_n \overline{a_n} q^n$ を表す.

[8] z_m たちは $\mathbb{Q}(\mu_{p^{n_0}})$ の方向に伸びることから, 一般論より p の外で不分岐なことが (reduction の様子などの幾何的な事情の解析は全く考慮しなくとも) 自動的に従う.

における像 $\exp^*(H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, T_f^*(1-j)))$ が定める lattice が計算される (加藤論文 14.18 周辺を参照のこと). また, D は lattice $\overline{f}\mathcal{O} \subset \mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{dR}(V_f^*(1-j))$ と一致する. $\square$

もうひとつの主結果である定理 2.3 の証明は, 定理 4.2 の岩澤理論的な一般化の定理と定理 4.1 の岩澤理論的な一般化を組み合わせることで, 似たような議論で証明することができる. 詳細は省略する.