

書 評

Haruzo Hida: p -adic Automorphic Forms on Shimura varieties
 Springer monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2004 年, 390 ページ.

落 合 理

本書は肥田晴三氏自身による、肥田理論¹⁾と呼ばれる整数論の分野の教科書である。肥田氏による他書 (例えば [1], [2]) で既に最も基本的な楕円モジュラー形式では肥田理論の説明が行われているが、更に一般の志村多様体への肥田理論の一般化が本書の主題である。一般の簡約可能代数群の志村多様体まで話を広げると一部の専門家を除いては情報が多すぎて混乱する恐れもあるが、本書自体の目的が考える志村多様体を一般化することにある以上、歴史を振り返りつつ一般化にも触れることが必要不可欠である。そのような訳で前半は、肥田理論の意味とその一般化の歴史を述べ、後半ではその準備に基づいて本書の内容に踏み込みたい。

早速本論に入る。以下素数 p を固定する。複素上半平面 $\mathfrak{H}$ 上の複素函数 $f(\tau)$ ($\tau \in \mathfrak{H}$) で合同部分群

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0, a \equiv 1 \pmod{N} \right\}$$

に対して (k に依存する) 不変性条件を満たすもののうち、無限遠で正則なものを重さ $k \geq 2$ レベル N の楕円モジュラー形式と呼ぶ。特に楕円モジュラー形式のうち無限遠で消えるものは、大事な対象であり楕円カスプ形式と呼ばれる。楕円カスプ形式のなす $\mathbb{C}$ -ベクトル空間を $S_k(\Gamma_1(N); \mathbb{C})$ と記す。モジュラー形式やモジュラー函数は、代数体の類体構成問題 (Hilbert の第 12 問題) から最近の Fermat 予想と谷山-志村予想に到るまで整数論の様々な局面に繋がっており、まさに整数論の中心の対象である。 $S_k(\Gamma_1(N); \mathbb{C})$ は有限次元 $\mathbb{C}$ -ベクトル空間で、強い代数性を持つことが非常に大切である。つまり、 $S_k(\Gamma_1(N); \mathbb{C})$ の中で $\mathfrak{H}$ の無限遠点 $\tau = i\infty$ のパラメーター $q = \exp(2\pi i\tau)$ によるフーリエ展開の係数が $\mathbb{Z}$ に入るものからなる部分 $\mathbb{Z}$ -加群 $S_k(\Gamma_1(N); \mathbb{Z})$ は有限生成な $\mathbb{Z}$ -加群で $S_k(\Gamma_1(N); \mathbb{C}) = S_k(\Gamma_1(N); \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ が成り立つ。また上の代数性の基礎でもあるが、モジュラー形式は代数幾何の視点からも構成及び解釈できる。例えば、 $S_k(\Gamma_1(N); \mathbb{Z})$ は $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ 上定義されたコンパクトモジュラー曲線 $X_1(N)$ 上の自然な微分形式の接続層 ω の大域切断の空間 $H^0(X_1(N), \omega^k)$ の中に実現される。さて、 A が $\mathbb{C}$ の部分加群のときは $S_k(\Gamma_1(N); \mathbb{C})$ と全く同様に $S_k(\Gamma_1(N); A)$ が定義されるが、 p 進的な環 $A = \mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ などに対しても $S_k(\Gamma_1(N); A)$ は自然に意味を成し $S_k(\Gamma_1(N); A) = S_k(\Gamma_1(N); \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A$ が成り立つ。モジュラー形式 f と g にはフーリエ係数 $\{a_n(f)\}$ と $\{a_n(g)\}$ の間の p ベキの合同関係によって p 進的な距離が入り、 $S_k(\Gamma_1(Np^r); \mathbb{Z}_p)$ はそのような距離に関して完備な空間である。粗く言うと肥田理論は重さ k やレベル (の p ベキ部分) を変えたときの空間 $S_k(\Gamma_1(Np^r); \mathbb{Z}_p)$ の間の合同を統制する。もう少し正確にいうと、 $S_k(\Gamma_1(Np^r); \mathbb{Z}_p)$ の中で p でのヘッケ作用素 $T(p)$ が可逆的に作用するものたち (これらを p -通常の又は ordinary と呼び、 p -通常のものの部分空間を $S_k(\Gamma_1(Np^r); \mathbb{Z}_p)^{\text{ord}}$ で記す) に対して、肥田氏はこれらが重さやレベルを変動

させたとき非常によく振る舞うことを示し、次のような定理を示した.²⁾

定理 1 (モジュラー形式の肥田コントロール定理) N を p と素な自然数とする. 岩澤代数 $\mathbb{Z}_p[[X]]$ を係数とする d 個の q -展開 (階数 d は N に依存する):

$$\mathcal{F}^{(1)} = \sum A_n^{(1)} q^n \text{ (但し } A_n^{(1)} \in \mathbb{Z}_p[[X]])$$

...

$$\mathcal{F}^{(d)} = \sum A_n^{(d)} q^n \text{ (但し } A_n^{(d)} \in \mathbb{Z}_p[[X]])$$

が存在して, $\mathbb{Z}_p[[X]][[q]]$ の部分 $\mathbb{Z}_p[[X]]$ -加群として $\mathbb{S}_N^{\text{ord}} := \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathcal{F}^{(i)} \cdot \mathbb{Z}_p[[X]]$ と定めると, 各 $k \geq 2$, $r \geq 1$ に対して, 自然な同型

$$\mathbb{S}_N^{\text{ord}} \otimes_{\mathbb{Z}_p[[X]]} \mathbb{Z}_p[[X]]/(\Phi_{k,r}) \cong S_k(\Gamma_1(Np^r); \mathbb{Z}_p)^{\text{ord}}$$

がある ($\Phi_{k,r} = (1+X)^{p^{r-1}} - (1+p)^{(k-2)p^{r-1}} \in \mathbb{Z}_p[[X]]$).

実際は, モジュラー形式の空間だけでなくその双対である $\mathbb{Z}_p[[X]]$ 上の p -進ヘッケ環も普遍族をなすとともに, $\mathbb{Z}_p[[X]]$ 上定義された p -進ガロア表現も構成されている. あまり馴染みのない方はモジュラー形式やヘッケ環と付随する p -進ガロア表現などが, p -通常のなものに限れば非常によい秩序をもち, 岩澤代数 $\mathbb{Z}_p[[X]]$ の上で重さ k を変数とする p -進連続な族がある雰囲気だけでも感じ取ってほしい. 具体例として Ramanujan のモジュラー形式 $\Delta = q \prod (1 - q^n)^{24}$ を考えてみると, 肥田理論により次のような事実が帰結される. p を Δ の ordinary な素数 (つまり $a_p(\Delta)$ が p 進的に可逆なもの) とする³⁾. このとき, Δ と合同なモジュラー形式達の重さ k に関する p -進族が存在する. 特に各整数 $k \geq 2$ に対して重さ k でレベル p の ordinary な固有カスプ形式 f_k でフーリエ係数が Δ と mod p で合同なものが存在して一意に定まる.

さて, 肥田理論は 86 年出版の 2 本の論文で上で述べたような最も基本的な $GL(2)/\mathbb{Q}$ において確立された. 粗く言うと, 論文 [3] で Betti 的な証明が与えられ, もう片方 [4] で de Rham 的な証明が与えられた. Betti 的な証明は考え方が見やすく最初に高次元への一般化が追求されたのでこちらから振り返ってみる. カスプ形式の Betti コホモロジー解釈として次を思い出そう.

$$(1) \text{ Eichler-志村同型 } S_k(\Gamma_1(Np^r); A) \oplus \overline{S_k(\Gamma_1(Np^r); A)} \cong H_{\text{par}}^1(X_1(Np^r)(\mathbb{C}); \text{Sym}^{k-2}(A^{\oplus 2}))$$

$$(2) \text{ 群コホモロジー解釈 } H_{\text{par}}^1(X_1(Np^r)(\mathbb{C}); \text{Sym}^{k-2}(A^{\oplus 2})) \cong H_{\text{par}}^1(\Gamma_1(Np^r), \text{Sym}^{k-2}(A^{\oplus 2}))$$

よって, $S_k(\Gamma_1(Np^r); A)$ を統制するには群コホモロジー $H_{\text{par}}^1(\Gamma_1(Np^r), \text{Sym}^{k-2}(A^{\oplus 2}))$ を統制すればよい. 重さ $k = 2$ を固定してレベルの p ベキを変動させる時, 群に関するスペクトル系列の制限写像:

$$H_{\text{par}}^1(\Gamma_1(Np^r); \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\text{res}} H_{\text{par}}^1(\Gamma_1(Np^s); \mathbb{Z}_p)^{\Gamma_1(Np^r)}$$

を考えればよい ($r < s$). 制限写像 res の Kernel, Cokernel 上にはヘッケ作用素 $T(p)$ が p 進位相に関してベキ零に作用することがコサイクルの計算で確かめられるので, res の p -通常部分への制限は同型となる. レベルの p ベキを固定して k を変動させる時は, ($m \leq r$ の条件下で)⁴⁾ 群コホモロジーの係数を操作して

$$H_{\text{par}}^1(\Gamma_1(Np^r); \text{Sym}^{k-2}((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^{\oplus 2})) \longrightarrow H_{\text{par}}^1(\Gamma_1(Np^r); \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$$

なる自然な写像がつくれ, Kernel, Cokernel 上では $T(p)$ が p -進的にベキ零である. ここでは定義や計算の仕組みを省略したが, 群コホモロジーの計算だけで $S_k(\Gamma_1(Np^r); \mathbb{Z}_p)^{\text{ord}}$ がレベルや重さの変動に関して普遍的な p -進族をなすことが示せるのは面白く教育的にも有益であるので, 肥田氏の論文 [3] または教科書 [1] の 7 章も参考にしつつ議論を再現してみることをお勧めしたい.

さて, このような Betti 的な議論で他の代数群 G に対しても p -進的な普遍族をつくらうとすると一般には困難が生じる. 肥田氏による次のふたつの仕事はその様子を表している. ひとつは 80 年代後半の総実代数体 F 上の代数群 $GL(2)_{/F}$ に付随したヒルベルトモジュラー形式への一般化である. ヒルベルトモジュラー形式を普通に扱くと, ヒルベルトモジュラー多様体という高次元代数多様体に関するスペクトル系列の議論を行わねばならず, 中間次数の Betti コホモロジーの消滅性やねじれの非存在などで未知の情報が多く計算が機能しない. ヒルベルトモジュラーの場合は, Jacquet-Langlands-清水対応:

$$\{GL(2)_{/F} \text{ のカスプ形式} \} = \begin{cases} \{ \text{志村曲線}_{/F} \text{ 上のカスプ形式} \} & [F : \mathbb{Q}] \text{ が奇数} \\ \{ 0 \text{ 次元志村多様体}_{/F} \text{ 上のカスプ形式} \} & [F : \mathbb{Q}] \text{ が偶数} \end{cases}$$

を用いて, 代数曲線の Betti コホモロジーに問題を移行するトリックで運よく問題を切り抜けられた. ただ, より一般の志村多様体 (例えば Siegel 多様体など) ではこのような都合のよい対応は必ずしも望めない. もうひとつの肥田氏の仕事 [5] では, 代数群 $SL(n)$ の場合に高次の群コホモロジーのどのような情報を公理として仮定すればスペクトル系列の計算が機能するかを調べ, 肥田理論を構築している. ただ公理とする中間次数コホモロジーの消滅性などは, 既にそれが示されている場合ですら, 調和解析的議論も要する難しい問題であることに注意しておきたい.

90 年代の後半から肥田氏は微分形式としてのモジュラー形式やその無限遠での展開級数をより直接的に扱うような de Rham 的な方法でも肥田理論の一般化を試みている. こちらの話が本書の内容に密接に関連しており, 更にもう少し内容に踏み込みつつ本書と結び付けていきたい. 高次元の代数群 G でのモジュラー形式では, まず重さは単なるスカラーではなく G の部分トーラスの指標から定まる整数の組となる. また, 関連して, モジュラー形式やコホモロジーなどが ordinary であるという定義を与えるのにもまずヘッケ作用素 $T(p)$ を適切に補正しなければならない.⁵⁾ そのような高次元化に伴う定義の問題はここでは復習できないが, もちろん本書の中では説明されている. 本書のテーマである定理 1 の一般化は次の定理 2 と系 1 のようになる.

定理 2 (コントロール定理の公理的な一般化) PEL 型の志村多様体 $S_G(\Gamma)$ を与える簡約代数群 G と (p と素な) レベル構造 $\Gamma \subset G(\mathbb{R})$ に対して次を仮定する.

(C) E を Hasse 不変量のもちあげを与えるモジュラー形式とすると, ordinary なモジュラー形式 f に対して Ef は再び ordinary となる.

(F) 重さ k が変動するとき $S_k(\Gamma; \mathbb{Z}_p)^{\text{ord}}$ の次元は有界である.

このとき, $\mathbb{Z}_p[[X_1, \dots, X_r]]$ (r は G の半単純階数) 上の ordinary なカスプ形式の p -進族の空間 $\mathcal{S}^{\text{ord}}$ が存在して, 重さとレベルの変動させた全ての ordinary なカスプ形式たちを普遍的に支配する.

まず, 上述の 2 条件は先に述べた以前の仕事 [5] よりも Betti コホモロジーに要求される条件が緩く, 多くの具体的状況で検証可能である. Hasse 不変量 E は標数 $p > 0$ では q -展開が 1 であることから,

条件 (C) は、 p -進的環に係数をもつモジュラー形式に対して無限遠での q 展開をとる写像の単射性を保証する「 q -展開原理」が代数群 G とレベル構造 Γ に p ベキのレベル p^r を加えた群 $\Gamma(p^r) \subset \Gamma$ ごとに成り立てば正しい。条件 (F) は、Eichler-志村写像によって Betti コホモロジーの次元の重さに関する有界性に帰着され、それらは (原理的には) 群コホモロジーの計算によって示すことができる。例えばジークルモジュラーの場合には条件 (F) は、Tilouine や Urban によって確かめられている。定理 2 の系として本書と論文 (例えば [6]) などで次が導かれている⁶⁾。

系 1 (コントロール定理の一般化) ヒルベルトモジュラー形式、ジークルモジュラー形式やユニタリー群のモジュラー形式の場合及び PEL 型の志村多様体が元々コンパクトな場合など広範な場合に条件 (C) と (F) が確かめられ、定理 2 の ordinary なモジュラー形式の肥田理論が成立する。^{7) 8)}

標数 p の係数をもつモジュラー形式の q -展開は志村多様体 $S_G(\Gamma(p^r))$ の標数 p の還元 $\overline{S_G(\Gamma(p^r))}$ のある“無限遠点”における展開である。考えている函数が“無限遠点”を含む成分上で消えている時に $\overline{S_G(\Gamma(p^r))}$ 全体でその函数が消えていることが保証されないといけない。そのようなわけで、条件 (C) に必要な「 q -展開原理」を示すには $\overline{S_G(\Gamma(p^r))}$ が“既約”になっていれば十分である。この既約性の問題をレベルの p -ベキ p^r を動かして一斉に考える。 $\overline{S_G(\Gamma(p^{r+1}))}$ は $\overline{S_G(\Gamma(p^r))}$ の被覆になっているので志村多様体の塔 (井草塔) ができる⁹⁾。このような問題は一般に「井草塔の既約性」と呼ばれている。「井草塔の既約性」を示すには、 $\overline{S_G(\Gamma(p^r))}$ の“無限遠点”を含む成分を安定化する $\overline{S_G(\Gamma(p^r))}$ の自己同型群が可能な限り大きいことを示せばよい。肥田氏は井草塔の既約性に関して新しいアプローチを得た。その「井草塔の既約性」の肥田氏流の証明を与えることが本書の大切な目的の一部である。井草塔の既約性は元々 $G = GL(2)_{\mathbb{Q}}$ のとき Deuring 氏や井草氏によって確立された。井草氏はモジュラー曲線の超特異点でのモノドロミー部分群を用いることで自己同型全体が十分大きいことを保証している。ヒルベルトモジュラーの場合に Ribet 氏、ジークルモジュラーの場合に Faltings, Chai 両氏により井草塔の既約性が得られているが、それぞれ通常点又はトロイダルコンパクト化の無限遠でのモノドロミーから大きな自己同型を得る異なったアプローチである。肥田氏の方法も、Chai-Faltings のように志村多様体のトロイダルコンパクト化を用いるが、生成点におけるモノドロミーを考える体論的な方法であるため、Chai-Faltings の方法が使えない志村多様体¹⁰⁾ にも一般化しやすい。本書では一般の PEL 型志村多様体の井草塔の既約性に対する著者による方法を解説している。そのためには志村多様体の p -進整数環上でのモデルやコンパクト化などの土台がしっかりしていなければならない、そういった事柄の基礎文献を提供することも本書の動機かもしれない。

本書の内容に入っていこう。本書は 8 章からなる。第 1 章は導入であるが独立した内容が大半を占める。本書の内容を超えて肥田理論を介した岩澤理論の一般化への夢が語られている。本書自体でも以降ではそこまでは結局立ち入っていないこと、また評者自身が独自に取り組んでいる岩澤理論の一般化の試みとも方向性が重なる部分が多ので逆に取ってこれ以上は立ち入らない。第 2 章は代数的な準備である。例えば一般化されたガロア理論¹¹⁾ や代数曲線などの一般論とともにガウスの相互法則から類体論までが早足で述べられている。この章はほとんど既習者のための概念や記号の合意に近いが、注意深く目を通すと Kummer や Kronecker からの歴史 (とおそらく肥田氏自身の研究の一部) までの全てを一貫してとらえようという視点を味わえるのではないだろうか。第 3 章は「古典的肥田理論」について述べられている。 $GL(2)_{\mathbb{Q}}$ の場合に井草塔の既約性と上述のコントロール定理の証明を与えている。井草塔の既約性に関しては肥田氏によるモジュラー曲線のカスプでのモノドロミーをみる方

法で井草氏の別証明が書かれている。コントロール定理は肥田氏の論文 [4] のアイデアに沿いつつも、一般化に適した公理的なもので書かれている。第4章はヒルベルトモジュラー形式の場合の概説である。キーワードの羅列になるが単数群の作用、ヒルベルトモジュラー多様体のモジュライの意味、ヒルベルトモジュラー多様体のトロイダルコンパクト化、ヒルベルトモジュラーの場合の井草塔の既約性の証明などが(肥田氏の方法で)述べられておりコントロール定理の(de Rham 的な)証明も与えられている。第5章は、より一般の群 G の場合に対称空間や Eichler-志村写像(先に $GL(2)_{\mathbb{Q}}$ の場合で説明した写像)について説明している。先に述べたように Eichler-志村写像は定理2の条件 (F) を確かめる上で大切である。第6章は Mumford の GIT からのモジュライ理論やトロイダルコンパクト化について述べられ後半はジークルモジュラー多様体の場合の井草塔の既約性が説明されている。第7章は志村多様体の一般的な解説であり、特に PEL 型の志村多様体の分類と Kottwitz による整数環上でのモデルに関連した事柄の解説が与えられている。最終章の第8章では今までの話をまとめて PEL 型の志村多様体のコントロール定理にあてられている。基本的には上で述べた定理2と系1と同様の展開がジークルモジュラー形式やユニタリー群のモジュラー形式で実際に議論されている。

以上のように本書は井草塔の既約性とコントロール定理の証明を中心として構成されているものの、本書評のようにコントロール定理の一般化に焦点を絞った物語的展開によって、肥田理論の広がりや今後の展望は伝えきれなかったかもしれない。その点はご容赦いただきたい。最後に、今まで見てきたことに基づき、本書の意義やこれから肥田理論を知りたいという研究者や学生の方へのコメントを記したい。最初から本書のみを教科書として最初から追って読んでいくことは、非常に豊富な内容が凝縮されている点や記号の煩雑さその他の問題もありおそらく不可能かもしれない。ただ、[1], [2] などの同著者による教科書でより基礎的な内容を把握したり上で述べてきたような大きな流れを踏まえながら、明確な目的を持った読者が的を絞って読んでいけば、本書に含まれたモジュラー形式の代数的な取り扱いに関する著者独自の視点から得られるものは非常に多くその点で貴重な本であると思う。肥田理論を学ぶにあたっては遠回りに思えるかもしれないが、岩澤理論とモジュラー形式に付随する p 進ガロア表現などを勉強されることも大事である。例えば Washington の教科書 [7] にあるような古典的な岩澤理論の現象の多くは肥田理論の観点からは代数群 $GL(1)$ に関する肥田理論であると考えられる。また p -進ガロア表現は p ベキの合同をとりしきるが、肥田理論もまたモジュラー形式の合同の理論である。対象の類似性に気をつけながら学ぶことは理解を深めてくれることと思う。肥田理論のアイデアがより多くの人に浸透することを期待しつつ筆をおきたい。

注 釈

- 1) 肥田氏にはモジュラー形式や L -関数の幅広い研究があるが、特に彼のモジュラー形式の空間の p -進的変形の理論のみを指して肥田理論と称することが多い。本書評でも肥田理論をこの狭い意味で用いる。
- 2) 肥田理論は Eisenstein 級数を含めたモジュラー形式全体で成り立ち、実際 Eisenstein 級数も肥田理論の大事な例である。例えば教科書 [1] の7章などを参照のこと
- 3) $p = 2411$ などまれな例外を除いてほとんど全ての素数が ordinary である
- 4) 直前のレベル p^r のコントロールと組み合わせることと最終的に欲しい比較は m, r に関する制限なしで

得られる。

- 5) これらの問題はもちろん肥田氏の仕事の大事な部分であり氏の論文のいくつかでも説明されている。また、Betti 的又は de Rham 的などということに関係なく以前から肥田氏によって調べられていたものである。
- 6) 条件 (C) に関連して、トロイダルコンパクト化の必要性や井草塔の既約性の証明で詳細が省かれたり主張があいまいで読み取りにくいところもあるかもしれない
- 7) ヒルベルトモジュラーでは肥田氏の前結果の別証明となる。ジークルモジュラーでは Tilouine-Urban が条件的に結果を得ていたが [3] と類似の Betti 的な方法のため素数 p が十分大きいことなどの制限がある。
- 8) 一般化としては大きな進歩であるが、取り扱う問題

の種類によっては Betti 構造や étale 構造が必要なこともあり、その場合にはもちろん先の Betti 的なアプローチが依然大切だと思われる。

- 9) 実際は証明の都合からしても p の外のレベル構造 Γ の方も動かした塔を考えている
10) 本書の 4.2.4 節を参照のこと。
11) Krull による無限次拡大のガロア理論のみならず超越拡大も扱える一般化を使う。

文 献

- [1] H. Hida, *Elementary theory of L -functions and Eisenstein series*, London Mathematical Society Student Texts **26**, Cambridge University Press, 1993.
[2] H. Hida, *Geometric Modular Forms and Elliptic Curves*, World Scientific Publishing Co., Singa-

pore, 2000.

- [3] H. Hida, *Galois representations into $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms*, Invent. Math. 85, 545-613, 1986.
[4] H. Hida, *Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, Ann. Sci. Ec. Norm. Super. (4) 19, No. 2, 231-273, 1986.
[5] H. Hida, *Control theorems of p -nearly ordinary cohomology groups for $SL(n)$* , in Bull. Soc. Math. Fr. 123, 425-475, 1995.
[6] H. Hida, *Control theorems for coherent sheaves on Shimura varieties of PEL-type*, Journal of the Inst. of Math. Jussieu 1, 1-76, 2002.
[7] L. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*. 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics. 83. Springer, 1997.

(2007 年 8 月 30 日提出)

(落合理・大阪大学)