ATOMES GALOISIENS ET (φ, Γ)-MODULES

TADASHI OCHIAI

[1]

Abstract. On classifie les représentations modulo p de rang deux de groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$. Ensuite, on décrit les (φ, Γ)-modules qui leur corréspondent.

Contents

1. Classification des représentations modulo p du groupe de Galois local p-adique

Notations

L: corps p-adique, k_L: le corps résiduel de L.
$G = G_{\mathbb{Q}_p}$: groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$.
Il me semble que la plupart des enoncés dans ce resumé peuvent se généraliser au cas de $G = G_K$ avec K n'importe quelle extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Pour la simplicité, on se restreint au cas $K = \mathbb{Q}_p$ comme dans l'article de Colmez.

Lien entre le but de cet exposé et le but du travail de Colmez

Le but de ce travail par Colmez est d'établir la correspondance de la première ligne dans le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
(G \longrightarrow GL_2(\overline{\mathbb{Z}}_p)) \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, "T \mapsto D(T)"'] & & (\text{Rep's } p\text{-adiques de } GL_2(\mathbb{Q}_p)) \\
& ((\varphi, \Gamma)\text{-modules}) \arrow[ur, "D \mapsto \pi(D),\ \pi(D)|_P \cong \psi^{-\infty}(D)"'] &
\end{tikzcd}$$

[1]C'est une note pour le groupe de travail sur l'article de Colmez intitulé "Représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules (version provisoire et partielle)". Je remercie Olivier Brinon pour des discussions sur le sujet ainsi que la correction linguistique du texte. Je remercie également Pierre Colmez qui a repondu à mes question sur l'article.

où $P = \begin{pmatrix} \mathbb{Q}_p^\times & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme montré dans le diagramme, les (φ, Γ)-modules jouent le rôle très important qui lie ces catégories. En gros,

1. On classifie les "atomes" (des objets indécomposables) du coté galoisien et du coté automorphe.
2. On démontre qu'il y a une bonne bijection entre les "atomes" galoisiens et les "atomes" automophes.
3. On compare les extensions dans la catégorie galoisienne et les extensions dans la catégorie automorphe pour montrer que la déformation du coté galoisien est aussi grande que la déformation du coté automorphe.

Dans cet exposé, on classifie les "atomes" du coté galoisien et on décrit les (φ, Γ)-modules correspondants.

Rappels

1. G est un groupe profini et résoluble.
2. $$\begin{tikzcd} & \mathbb{Q}_p^{\mathrm{sep}} \\ \mathbb{Q}_p^{\mathrm{t}} \arrow[ur, dash, "P"] & \\ \mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}} \arrow[u, dash, "I^{\mathrm{t}}"] & \\ \mathbb{Q}_p \arrow[u, dash, "G_{\mathbb{F}_p}"] \arrow[uuur, dash, "G"'] & \end{tikzcd}$$
   où $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ est l'extension maximale non-ramifiée de K et $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{t}}$ est l'extension maximale modérée.
3. On a $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}} = \cup_{p \nmid m} \mathbb{Q}_p(\zeta_m)$, $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{t}} = \cup_{p \nmid n}, \mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}(\pi^{1/n})$ où π est une uniformisante de $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$.
4. On a
   $$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}/\mathbb{Q}_p) \cong G_{\mathbb{F}_p} \cong \widehat{\mathbb{Z}},\ \mathrm{Frob}_p \mapsto 1.$$
5. Par définition, on a $I^{\mathrm{t}} \cong \varprojlim_m \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}(\pi^{1/(p^m-1)})/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})$. Pour tout m, on a un isomorphisme:
   $$\omega_m : \ \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}(\pi^{1/(p^m-1)})/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}) \cong \mathbb{F}_{p^m}^\times,$$
   $$g \mapsto \frac{g(\pi^{1/(p^m-1)})}{\pi^{1/(p^m-1)}} \text{ modulo } p.$$
   (a) ω_m est un caractère canonique indépendant du choix de π (Si on choisit une autre uniformisante πu, u^{1/p^m-1} est contenu dans $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$).
   (b) Pour tout m, on pose $\mathbb{Z}_{p^m} = W(\mathbb{F}_{p^m})$ et on note $\mathbb{Q}_{p^m}$ le corps des fractions de $\mathbb{Z}_{p^m}$. Pour tout m, le caractère ω_m s'étend en un caractère sur $G_{\mathbb{Q}_{p^m}}$ (rappelons que le groupe d'inertie de $G_{\mathbb{Q}_{p^m}}$ s'identifie à celui de $G = G_{\mathbb{Q}_p}$).
   (c) Pour $m = 1$, ω_m n'est rien d'autre que le caractère de Teichmuller ω.

6. P est isomorphe à la pro-p complétion d'un groupe libre de rang $\mathbb{N}$.
7. Vu qu'on a l'extension

$$1 \longrightarrow I^{\mathrm{t}} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{t}}/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow G_{\mathbb{F}_p} \longrightarrow 1$$

   On a l'action par conjugaison de $G_{\mathbb{F}_p}$ sur I^{t}, $g \cdot h := \widetilde{g}h\widetilde{g}^{-1}$ où $g \in G_{\mathbb{F}_p}$, $h \in I^{\mathrm{t}}$ et $\widetilde{g} \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{t}}/\mathbb{Q}_p)$ un relèvement de g (l'action est biendéfinie parce que I^{t} est abélien). L'élément $g \cdot h$ coïncide avec l'élément $\varprojlim_m x_m^g$ lorsqu'on identifie h à un élément $\varprojlim_m x_m \in \varprojlim_m \mathbb{F}_{p^m}$.

Lemme 1.1. *Soit $V \cong k_L^{\oplus n} \underset{\rho}{\circlearrowleft} G$ (k_L-linéaire, continue). Si V est simple comme G-module, P agit trivialement sur V.*

(*Dém.*). 1. P est un p-groupe $\Longrightarrow |V^P| \equiv |V|$ modulo $p \Longrightarrow V^P \neq \{0\}$.
2. P est un sous-groupe distingué de G, d'où la filtration G-stable :

$$\{0\} \subsetneqq V^P \subset V.$$

3. V est G-simple $\Longrightarrow V^P = V \Longrightarrow P$ agit trivialement sur V.

$\square$

Corollaire 1.2. *Soit $V \cong k_L^{\oplus 2} \underset{\rho}{\circlearrowleft} G$ (k_L-linéaire, continue). Alors P agit trivialement sur V^{ss} (la semi-simplification de V par rapport à G).*

(*Dém*). On a soit $V^{\mathrm{ss}} = V$ soit $V^{\mathrm{ss}} = k_L(\delta_1) \oplus k_L(\delta_2)$. Dans le premier cas, c'est déjà démontré dans Lemme 1.1. Dans le deuxième cas est aussi clair parce que les ordres de δ_1 et δ_2 sont premiers à p. $\square$

Grâce au lemme précedent, il s'avère que l'action de I^{t} est importante. Serre a défini la notion de caractère fondamental dans son article dans le journal Duke en 1987.

Définition 1.3. Un caractère $I^{\mathrm{t}} \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ est *un caractère fondamental de niveau m*, s'il se factorise par $\mathbb{F}_{p^m}^{\times}$ mais ne se factorise par aucune $\mathbb{F}_{q^{m'}}^{\times}$ avec plus petit $m'|m$. Autrement dit, c'est un caractère qui équivaut à ω_m^r (r permier à $p^m - 1$).

Les atomes seront classifiés dans Proposition 1.6 après les préparations suivantes.

Proposition 1.4. *Soit $V \cong k_L^{\oplus 2} \underset{\rho}{\circlearrowleft} G$ (k_L-linéaire, continue).*

1. *L'action de I^{t} est (potentiellement) diagonalisable sur V^{ss}* (i.e. $V^{\mathrm{ss}} \cong k_L(\varphi) \oplus k_L(\varphi')$ *comme I^{t}-module après avoir étendu k_L si nécessaire).*
2. *Les caractères φ, φ' sont, soit de niveau un tous les deux, soit de niveau deux tous les deux. Dans le deuxième cas φ est conjugé à φ'.*

(*Dém*). Le premier énoncé est évident car le cardinal (généralisé) de I^{t} est premier à p. Pour démontrer le deuxième, on note que G agit à travers le quotient $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{t}}/\mathbb{Q}_p)$. On considère la conjugaison par $G_{\mathbb{F}_p}$ du I^{t}-module $V^{\mathrm{ss}} \cong k_L(\varphi) \oplus k_L(\varphi')$. La conjugaison par $\mathrm{Frob}_p \in G_{\mathbb{F}_p}$ est $k_L(\varphi^p) \oplus k_L(\varphi'^p)$ grâce à l'énoncé 7 de "Rappels" au début de la note. Parce que V^{ss} est une représentation de G, il y a deux possibilités: soit $\varphi^p = \varphi$ et $\varphi'^p = \varphi'$, soit $\varphi^p = \varphi'$ et $\varphi'^p = \varphi$. Dans le premier cas, les deux caractères sont de niveau 1. Dans le deuxième cas, les deux sont de niveau 2. $\square$

Maintenant, on introduit la définition suivante:

Définition 1.5. $V \cong k_L^{\oplus 2} \underset{\rho}{\circlearrowleft} G$ (k_L-linéaire, continue) s'appelle *atome galoisien* si elle est absolument indécomposable et n'est pas de la forme :

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow V \longrightarrow k(\omega) \longrightarrow 0$$

où ω est le caractère Teichmuller.

Proposition 1.6. *Soit $V \cong k_L^{\oplus 2} \underset{\rho}{\circlearrowleft} G$ (k_L-linéaire, continue). Alors, V est isomorphe à une des représentations suivantes :*

(I) *Une représentation $V(r,\delta) := \mathrm{Ind}(\omega_2^r) \otimes \delta$ $(0 \leq r \leq p-1)$ avec $\delta : G \longrightarrow k_L^\times$.*
(II) *Une extension non-triviale $0 \longrightarrow k_L(\delta_1) \longrightarrow V(\delta_1, \delta_2) \longrightarrow k_L(\delta_2) \longrightarrow 0$ où $\delta_1\delta_2^{-1} \neq \mathbf{1}, \omega, \omega^{-1}$.*
(III) *Une extension non-triviale $0 \longrightarrow k_L(\delta) \longrightarrow V(\delta,\delta,\tau) \longrightarrow k_L(\delta) \longrightarrow 0$ où $\tau \in H^1(G, k_L) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p^\times, k_L)$ dont la classe d'extension correspond à $V(\delta,\delta,\tau) \otimes \delta^{-1}$.*
(IV) *Une extension non-triviale $0 \longrightarrow k_L(\delta\omega) \longrightarrow V(\delta\omega,\delta,\tau') \longrightarrow k_L(\delta) \longrightarrow 0$ où $\tau' \in H^1(G, k_L\omega) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p^\times, k_L)$ dont la classe d'extension correspond à $V(\delta\omega,\delta,\tau') \otimes \delta^{-1}$.*

(*Dém*). Dans la liste, $V(r,\delta)$ est irréductible et les autres sont réductibles. Il est clair que, si V est réductible et indécomposable, V tombe dans un des trois derniers. Supposons que V est absolument irréductible comme G-module. D'après Proposition 1.4, on a $\rho|_{G_{\mathbb{Q}_{p^2}}} \cong k_L(\varphi) \oplus k_L(\varphi^p)$ avec $\varphi \cong \omega_2^{r+(p+1)s}\alpha = \omega_2^r\omega^s\alpha$ où $0 \leq s \leq p-2, 1 \leq r \leq p$ et α un caractère non-ramifié de G, ce qui nous permet de conclure

$$V \cong \mathrm{Ind}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathbb{Q}_{p^2}}(\omega_2^r\omega^s\alpha) \cong \mathrm{Ind}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathbb{Q}_{p^2}}(\omega_2^r) \otimes \omega^s\alpha.$$

□

2. (φ, Γ)-modules associés aux atomes galoisiens

On pose $\mathcal{O}_\mathcal{E} := \widehat{\mathbb{Z}_p[[X]][1/X]}$ (la complétion p-adique de $\mathbb{Z}_p[[X]][1/X]$), sur laquelle on définit un opérateur $\mathbb{Z}_p$-linéaire φ et une action $\mathbb{Z}_p$-linéaire de $\Gamma := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$ comme suite:

$$\varphi(X) = (1+X)^p - 1$$
$$g(X) = (1+X)^{\chi(g)} - 1$$

où χ est le caractère cyclotomique $\chi : \Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$. Maintenant, prenons l'extension maximale non-ramifiée $\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}$ de $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ et sa complétion p-adique $\widehat{\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}$.

1. L'opérateur φ s'étend naturellement à $\widehat{\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}$ de sorte qu'il coïncide avec le Frobenius sur le corps résiduel $k_L((X))^{\mathrm{sep}}$de $\widehat{\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}$. L'anneau $(\widehat{\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}})^{\varphi=1}$ coïncide avec $\mathbb{Z}_p$.
2. Grâce à la théorie de Fontaine-Wintenberger (la théorie des corps des normes), l'action de Γ se relève en une action de G sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}$ qui identifie $\mathrm{Gal}(\widehat{\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}/\mathcal{O}_\mathcal{E})$ et $H := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}))$, de sorte que $(\widehat{\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}})^H = \mathcal{O}_\mathcal{E}$.

Définition 2.1. Soit D un module de type fini sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. D est un (φ, Γ)-module si D est muni d'actions semi-liniéaires de φ et Γ qui commutent. Un (φ, Γ)-module D est étale si $\varphi(D)$ engendre D sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.

On commence par les représentations $\mathcal{O}_L$-adiques T et leurs (φ, Γ)-modules associés.

Théoreme 2.2. *On a une équivalance des $\otimes$-catégories :*

$$\{\mathcal{O}_L\text{-représentations de type fini de } G\} \longleftrightarrow \{(\varphi,\Gamma)\text{-modules étales sur } \mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}\}$$
$$T \longrightarrow D(T) = (T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\mathrm{nr}}})^H$$
$$T(D) = (D \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\mathrm{nr}}})^{\varphi=1} \longleftarrow D$$

Remarque 2.3. Si une $\mathcal{O}_L$-représentation T est un relèvement d'une k_L-représentation V de G, on a $D(T)/(\pi_L)D(T) \cong D(V)$.

Notons que $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est libre de rang p sur $\varphi(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$, ce qui rend possible de définir la trace $\mathrm{Tr}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}/\varphi(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})} : \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \longrightarrow \varphi(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$. De plus, le morphisme $\mathrm{Tr}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}/\varphi(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})} : \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \longrightarrow \varphi(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ est une injection dont l'image est contenue dans $p\varphi(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$. Les propriétés précédantes nous permettent de définir l'opéraeur ψ comme suit:

Définition 2.4. On définit un opérateur $\mathbb{Z}_p$-linéaire $\psi : \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ par:

$$\psi(a) = \frac{1}{p} \sum \varphi^{-1}(\mathrm{Tr}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}/\varphi(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})}(a)).$$

On se rappelle le résultat suivant sans démonstration:

Proposition 2.5. *Soit D un (φ, Γ)-module étale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. On a une unique application additive ψ sur D qui satisfait*

$$\psi(a \cdot \varphi(x)) = \psi(a) \cdot x$$

pour $a \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et $x \in D$.

Définition 2.6. Soit D un (φ, Γ)-module de longueur finie sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. On définit sous $\mathbb{Z}_p[[X]]$-modules $D^\natural, D^\sharp, D^+$ de D comme suit:

1. $D^\sharp$ (resp. $D^\natural$) est le plus grand (le plus petit) sous-$\mathbb{Z}_p[[X]]$-module de type fini de D sur lequel ψ est surjectif.
2. D^+ est le plus grand sous-$\mathbb{Z}_p[[X]]$-module de type fini de D stable par φ.

Par la définition de ψ, ψ est une application $\mathbb{Z}_p$-linéaire qui agit sur X par:

$$\psi(X) = \frac{1}{p} \sum_{\zeta^p=1} (\zeta(X+1) - 1),$$

ce qui nous permet de déduire les propriétés suivantes de l'action de ψ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_L$:

1. Pour tous les $n = pm + a \in \mathbb{Z}$ $(0 \leq a \leq p-1)$, on a

$$\psi(X^n) = \begin{cases} \sum_{i=0}^m a_i X^i & n \geq 0 \\ \sum_{i=n}^m b_i X^i & n < 0 \end{cases}$$

où $a_i \in \mathcal{O}_L$ (resp. $b_i \in \mathcal{O}_L$) est unité si et seulement si $i = m$.

2. Soit $P(X) \in \mathbb{Z}_p[X]$ un polynôme de degré $d = pm + a \geq 0$ $(0 \leq a \leq p-1)$, alors $\psi(P)$ un polynôme de degré m.
3. On a $\psi(1/X) = 1/X$.

Dans $k_L((X)) = \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_L/(p)$, le calcul est encore plus simple :

1. Pour tous les $n = pm + a \in \mathbb{Z}$ $(0 \leq a \leq p-1)$, on a
$$\psi(X^n) = \psi(X^{pm}(X+1-1)^a) = \psi(\varphi(X^m) \cdot (X+1-1)^a) = (-1)^a X^m$$
2. Soit $Q(X) = a_d X^d + a_{d+1} X^{d+1} + \cdots \in \mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ une série formelle telle que $a_d \neq 0$ et $d \leq -2$. Alors, $\psi(Q(X)) = b_{d'} X^{d'} + b_{d'+1} X^{d'+1} + \cdots \in \mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ une série formelle telle que $b_{d'} \neq 0$ et $d' > d$.

Du point de vue de convergence de series formelle, ψ est un opérateur qui améliore la convergence des séries.

Définition 2.7. Soit D un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-module de type fini. Un *treillis* M de D est un sous-$\mathcal{O}_L[[X]]$-module fermé de D tel que

1. L'image de M dans D/pD est un réseau.
2. Pour chaque $n \geq 1$, l'image de M dans D/p^nD est de type fini sur $\mathcal{O}_L[[X]]$.

Lemme 2.8. 1. *$D^+, D^\natural, D^\sharp$ sont des treillis de D.*
2. *Soit M un treillis dans D. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\psi^n(M) \in D^\sharp$.*
3. *Si M est un treillis de D sur lequel ψ est surjectif, $D^\sharp/M$ est annulé par X.*
4. *Soit D est (φ, Γ)-module sur $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ de longueur finie. Alors $D^\sharp/D^\natural \cong H^0(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ab}}, T^\vee(1))^\vee$.*
5. *Soit D un (φ, Γ)-module absolument irréductible sur $k_L((X))$ de rang ≥ 2 et soit M un réseau de D. Si ψ est surjectif sur M, on a $M = D^\sharp$.*

D'ici jusqu'à la fin, on fixe un générateur topologique γ de Γ.

Exemple 2.9. Soit D=D(V) où $V = k_L(\delta)$ est une représentation de G de rang 1 sur $k_L((X))$. Alors

1. $\delta = \omega^s \alpha$ avec α un caractère non-ramifié de G.
2. $D(V) = k_L((X)) \cdot e$ tel que $\varphi(e) = \alpha(\mathrm{Frob}_p^{-1}) \cdot e$, $\gamma(e) = \omega^s(\gamma) \cdot e$.
3. $D^\sharp(V) = k_L[[X]] \cdot \dfrac{e}{X}$, $D^\natural(V) = D^+(V) = k_L[[X]] \cdot e$

On note $D^\natural(V) = D^+(V)$ de $V = k_L(\delta)$ par $k_L[[X]](\delta)$.

Maintenant, on va calculer le (φ, Γ)-module $D(V)$ et ses sous-modules $D^\sharp(V)$, $D^\natural(V)$ pour V appartenant au cas (I) dans Proposition 1.6. Il suffit de les calculer pour $V = V(r, \mathbf{1})$ car $D(V')$, $D^\sharp(V')$ et $D^\natural(V')$ sont les twist de $D(V)$, $D^\sharp(V)$ et $D^\natural(V)$ pour $V' = V(r, \delta) = V(r, \mathbf{1}) \otimes \delta$. On introduit des éléments

$$q := \varphi(X)/X, \ \lambda_+ = \prod_{n=0}^{\infty} \varphi^{2n+1}(\gamma(q)/q), \ \lambda_- = \prod_{n=0}^{\infty} \varphi^{2n}(\gamma(q)/q)$$

dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.

Proposition 2.10. *Soit $V = V(r, \mathbf{1}) = \mathrm{Ind}(\omega_2^r)$ et soit $D = D(V)$ le (φ, Γ)-module associé.*

1. *D est de rang deux sur $k_L((X))$ de base $e_{r,1}, e_{r,2}$ sur lesquels φ et γ agissent comme suivant :*
$$\varphi(e_{r,1}) = X^{(p-1)r}e_{r,2},\ \varphi(e_{r,2}) = e_{r,1}$$
$$\gamma(e_{r,1}) = (\lambda_+/\gamma(\lambda_+))^r e_{r,1},\ \gamma(e_{r,2}) = (\lambda_-/\gamma(\lambda_-))^r e_{r,2}$$
2. *On a $D^\natural = D^\sharp = k_L[[X]] \cdot \frac{e_{r,1}}{X^r} \oplus k_L[[X]] \cdot \frac{e_{r,2}}{X}$.*
3. *On a $D^\natural/XD^\natural = D^\sharp/XD^\sharp \cong k_L(\omega^{-1}) \oplus k_L(\omega^{-r})$.*

Remarque 2.11. 1. Il n'est pas difficile de montrer que les deux derniers énoncés résultent du premier. En fait, pour le deuxième énoncé, on démontre que ψ est surjectif sur $M = k_L[[X]] \cdot \frac{e_{r,1}}{X^r} \oplus k_L[[X]] \cdot \frac{e_{r,2}}{X}$ comme suit:

$$\psi\big(a\frac{e_{r,1}}{X^r}\big) = \psi\big(aX^{p-r}\frac{\varphi(e_{r,2})}{X^p}\big) = \psi(aX^{p-r}) \cdot \frac{e_{r,2}}{X} = (-1)^{p-r}a \cdot \frac{e_{r,2}}{X}$$
$$\psi\big(b\frac{e_{r,2}}{X}\big) = \psi\big(bX^{r-1}X^{-rp}X^{(p-1)r}e_{r,2}\big) = \psi\big(bX^{r-1}\varphi(1/X^r)\varphi(e_{r,1})\big) = (-1)^{r-1}b \cdot \frac{e_{r,1}}{X^r}$$

Par Lemme 2.8, on démontre que $M = D^\sharp = D^\natural$.

2. Pour la démonstration du premier énoncé, on prend un relèvement $T \cong \mathcal{O}_L^{\oplus 2}$ de V et la réduire à Proposition 2.14.

Lemme 2.12. *Soit $V = V(r, \mathbf{1}) = \mathrm{Ind}(\omega_2^r)$. Alors on a un relèvement $T \cong \mathcal{O}_L^{\oplus 2}$ de V tel que $T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est une représentaiton cristalline de rang deux sur L dont le module filtré $D_{\mathrm{crys}}(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)$ a une base e_1, e_2 sur lequel le Frobenius φ agit par*
$$\varphi(e_1) = p^r e_2,\ \varphi(e_2) = -e_1$$
et on a la filtration de Hodge comme suit:
$$\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{crys}}(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) = \begin{cases} D_{\mathrm{crys}}(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) & \text{if } i \leq 0, \\ L \cdot e_1 & \text{if } 1 \leq i \leq r, \\ 0 & \text{if } i > r+1. \end{cases}$$

Remarque 2.13. Pour démontrer Lemme 2.12, on peut construire T comme induction galoisienne $\mathrm{Ind}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathbb{Q}_{p^2}}$ de la puissance r-iéme de la représentation de rang un de $G_{\mathbb{Q}_{p^2}}$ du caractère de Lubin-Tate associé a $\mathbb{Q}_{p^2}$.

Proposition 2.14. *Soit T une représentation cristalline donnée dans Lemme 2.12. $D(T)$ est de rang deux sur $\mathbb{Z}_p\widehat{[[X]][1}/X]$ de base $e_{r,1}, e_{r,2}$ sur lesquels φ et γ agissent comme suit:*
$$\varphi(e_{r,1}) = q^r e_{r,2},\ \varphi(e_{r,2}) = e_{r,1}$$
$$\gamma(e_{r,1}) = (\lambda_+/\gamma(\lambda_+))^r e_{r,1},\ \gamma(e_{r,2}) = (\lambda_-/\gamma(\lambda_-))^r e_{r,2}$$

On se rappelle un résultat sur les (φ, Γ)-module de hauteur finie.

Définition 2.15. Soit $D = D(T \otimes \mathbb{Q}_p)$ un (φ, Γ)-module étale sur $L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. D est *de hauteur finie* si on a sous-$L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[X]]$-module $N = N(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)$ qui est stable par φ et Γ et qu'on a $D = N \otimes_{\mathbb{Z}_p[[X]]} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.

Colmez démontre le théoreme suivant:

Théoreme 2.16. *Soit $T \otimes \mathbb{Q}_p$ une représentation cristalline. Alors $D = D(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)$ est un (φ, Γ)-module étale sur $L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ de hauteur finie.*

On définit une filtration sur N par

$$\mathrm{Fil}^i N = \{x \in N \mid \varphi(x) \in q^i N\}.$$

Si $T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est cristallin, on a $N(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) \in D(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)$ par le théoreme de Colmez. Il est connu que $N(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)/XN(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)$ est isomorphe à $D_{\mathrm{cris}}(N(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p))$ comme module filtré.

L'idée de la démonstration de Proposition 2.14 se résume dans le diagramme suivant:

(1)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_L \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{Fontaine}"] & & \mathcal{B}_L \\
\mathcal{A}'_L \arrow[u, hook] \arrow[rr, hook, "\text{Colmez}"] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \mathcal{B}'_L \arrow[u, hook] \arrow[d, "\text{modulo } X"] \\
& \mathcal{C}_L \arrow[r, hook] & \mathcal{C}'_L
\end{tikzcd}$$

où

$\mathcal{A}_L =$ la catégorie des représentations sur L

$\mathcal{A}'_L =$ la catégorie des représentations cristallines sur L

$\mathcal{B}_L =$ la catégorie des (φ, Γ)-modules étales sur L

$\mathcal{B}'_L =$ la catégorie des (φ, Γ)-modules étales de hauteur finie sur L

$\mathcal{C}_L =$ la catégorie des φ-modules filtrés admissibles sur L

$\mathcal{C}'_L =$ la catégorie des φ-modules filtrés sur L

Etap I Puisque la représentation $T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ tombe dans la catégorie $\mathcal{B}'_L$, on prend son module filtré $D_{\mathrm{cris}}(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)$, qui tombe dans $\mathcal{C}_L$ (et dans $\mathcal{C}'_L$).
Etap II Par commutativité du diagramme (1), il doit exister $N = N(T \otimes \mathbb{Q}_p) \cong (L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[X]]) \cdot \widetilde{e}_1 \oplus (L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[X]]) \cdot \widetilde{e}_2$ qui est stable par φ et Γ et que N/XN est isomorphe à $D_{\mathrm{cris}}(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)$.
Etap III On veut calculer(chercher) les matrices $M_\varphi, M_\gamma \in GL_2(L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ qui représentent l'opérateur φ et l'action de $\gamma \in \Gamma$. Pour que les deux matrices proviennent de N, ils doivent satisfaire

(2)
$$M_\varphi \varphi(M_\gamma) = M_\gamma \gamma(M_\varphi)$$

(3)
$$M_\gamma \equiv \mathrm{Id} \text{ modulo } X$$

Etap IV Si la base $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$ de N sur $L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[X]]$ descend à la base e_1, e_2 de Lemme 2.12 modulo X, on peut prendre $M_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q^r & 0 \end{pmatrix}$ qui est $M_\varphi \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p^r & 0 \end{pmatrix}$ modulo X.

Etap V On prend $M_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q^r & 0 \end{pmatrix}$ et on montre que $M_\gamma = \begin{pmatrix} (\lambda_+/\gamma(\lambda_+))^r & 0 \\ 0 & (\lambda_-/\gamma(\lambda_-))^r \end{pmatrix}$ satisfait les conditions ci-dessus, ce qui n'est pas difficile à verifier en utilisant le fait que $\varphi(\lambda_+) = \lambda_-/(q/p), \varphi(\lambda_-) = \lambda_+$.

La proposition suivante décrit les (φ, Γ)-modules au cas (II) de Proposition 1.6:

Proposition 2.17. *Soit $V = V(\delta_1, \delta_2)$. Alors $D = D(V)^\natural$ contient $\dfrac{1}{X} \cdot k_L[[X]](\delta_1)$*

(*Dém*). On se rappelle le lemme suivant dont la démonstration se trouve dans l'article [C] de Colmez.

Lemme 2.18. *Soit $f : D_1 \longrightarrow D_2$ un morphisme des (φ, Γ)-modules.*

1. *L'image de $D_1^\sharp$ (resp. $D_1^\natural$) est contenue dans $D_1^\sharp$ (resp. $D_1^\natural$)*
2. *Si f est injectif (resp. surjectif), $f : D_1^\sharp \longrightarrow D_2^\sharp$ et $f : D_1^\natural \longrightarrow D_2^\natural$ sont injectif (resp. surjectif).*

On a deux suites exactes suivantes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & D^\natural & \longrightarrow & k_L[[X]](\delta_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c} & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & D^\sharp & \longrightarrow & \dfrac{1}{X}k_L[[X]](\delta_2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où M (resp. M') contient $k_L[[X]](\delta_1)$ (resp. $\dfrac{1}{X}k_L[[X]](\delta_1)$) par Lemme 2.18. On sait que $\mathrm{Coker}(b) = D^\sharp/D^\natural = H^0(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ab}}, V^\vee(1))^\vee$ par Lemme 2.8. Comme on suppose que $\delta_1 \neq \delta_2$ et que l'extension $V = V(\delta_1, \delta_2)$ est non-scindée, le corps du noyau de la représentation T n'est pas abélien. Donc, $\dim_{k_L}(\mathrm{Coker}(b)) = 1$. De plus, on a $\dim_{k_L}(\mathrm{Coker}(c)) = 1$ et $\dim_{k_L}(\mathrm{Ker}(c)) = 0$. En applicant le lemme de serpant, on conclure que $M \cong M'$. $\square$

Pour comprendre le cas (IV) de Proposition 1.6, On définit un (φ, Γ)-module $D_{\alpha,\beta}$ pour $\alpha, \beta \in k_L$.

Définition 2.19. $D_{\alpha,\beta}$ est un (φ, Γ)-module étale sur $k_L((X))$ muni d'une base e_1, e_2 telle qu'on a

$$\varphi(e_1) = e_1,\ \varphi(e_2) = e_2 + x_{\alpha,\beta}e_1$$
$$\gamma(e_1) = \omega(\gamma) \cdot e_1,\ \gamma(e_2) = e_2 + y_{\alpha,\beta}e_1$$

où $x_{\alpha,\beta}, y_{\alpha,\beta} \in k_L((X))$ sont définis comme suit :

1. Posons $c := -(\omega(\gamma)\gamma - 1)(1/X)|_{X=0}$ et $F = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n((\omega(\gamma) - 1) \cdot (\frac{1}{X} + c))$.
2. $y_{\alpha,\beta} = \alpha\dfrac{1}{X} + \beta F$
3. $x_{\alpha,\beta} \in k_L((X))$ est une unique solution de $(\omega(\gamma)\gamma - 1) \cdot x = (\varphi - 1) \cdot y_{\alpha,\beta}$.

Remarque 2.20. Posons $M_\gamma = \begin{pmatrix} \omega(\gamma) & y_{\alpha,\beta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & x_{\alpha,\beta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour montrer que $D_{\alpha,\beta}$ est un (φ, Γ)-module biendéfini, il suffit de montrer la condition:

$$M_\varphi\varphi(M_\gamma) = M_\gamma\gamma(M_\varphi).$$

Par la construction de $D_{\alpha,\gamma}$, $D_{\alpha,\beta}$ correspond à une extension

$$0 \longrightarrow k_L(\omega) \longrightarrow V \longrightarrow k_L \longrightarrow 0.$$

On peut calculer la classe de l'extension en utilisant la déscription de la dualité local de Tate via la théorie de (φ, Γ)-module:

Proposition 2.21. *Posons* $[D_{\alpha,\gamma}] \in H^1(G, k_L(\omega))$ *la classe obtenue via :*

$$\mathrm{Ext}^1_{(\varphi,\Gamma)}(k_L((X)), k_L((X))(\omega)) \cong \mathrm{Ext}^1_{G\text{-}modules}(k_L, k_L(\omega)) \cong H^1(G, k_L(\omega)).$$

Posons $f_{\alpha,\beta}$ *la classe dans*

$$H^1(G, k_L) \cong \mathrm{Hom}(G, k_L) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p^\times, k_L) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p^\times/(\mathbb{Q}_p^\times)^p, k_L)$$

qui correspond à un morphism $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p^\times/(\mathbb{Q}_p^\times)^p, k_L)$ *envoyant* $(p, \chi(\gamma))$ *à* (α, β). *Alors,* $[D_{\alpha,\beta}]$ *est orthogonal à* $f_{\alpha,\beta}$ *sous l'accouplement de la dualité locale de Tate:*

$$H^1(G, k_L(\omega)) \times H^1(G, k_L) \longrightarrow H^2(G, k_L(\omega)) \cong k_L.$$

References

[B] L. Berger, *Limites de repre'sentations cristallines*, Compositio Mathematica **140**, no. 6, 1473–1498, 2004.

[BLZ] L. Berger, H. Li, H. Zhu, *Construction of some families of 2-dimensional crystalline representations*, Mathematische Annalen **329**, no. 2, 365–377, 2004.

[C] P. Colmez, (φ, Γ)*-modules et representations du mirabolique de* $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, preprint, disponible à http://www.institut.math.jussieu.fr/ colmez/Psi-ast.pdf, 2007.