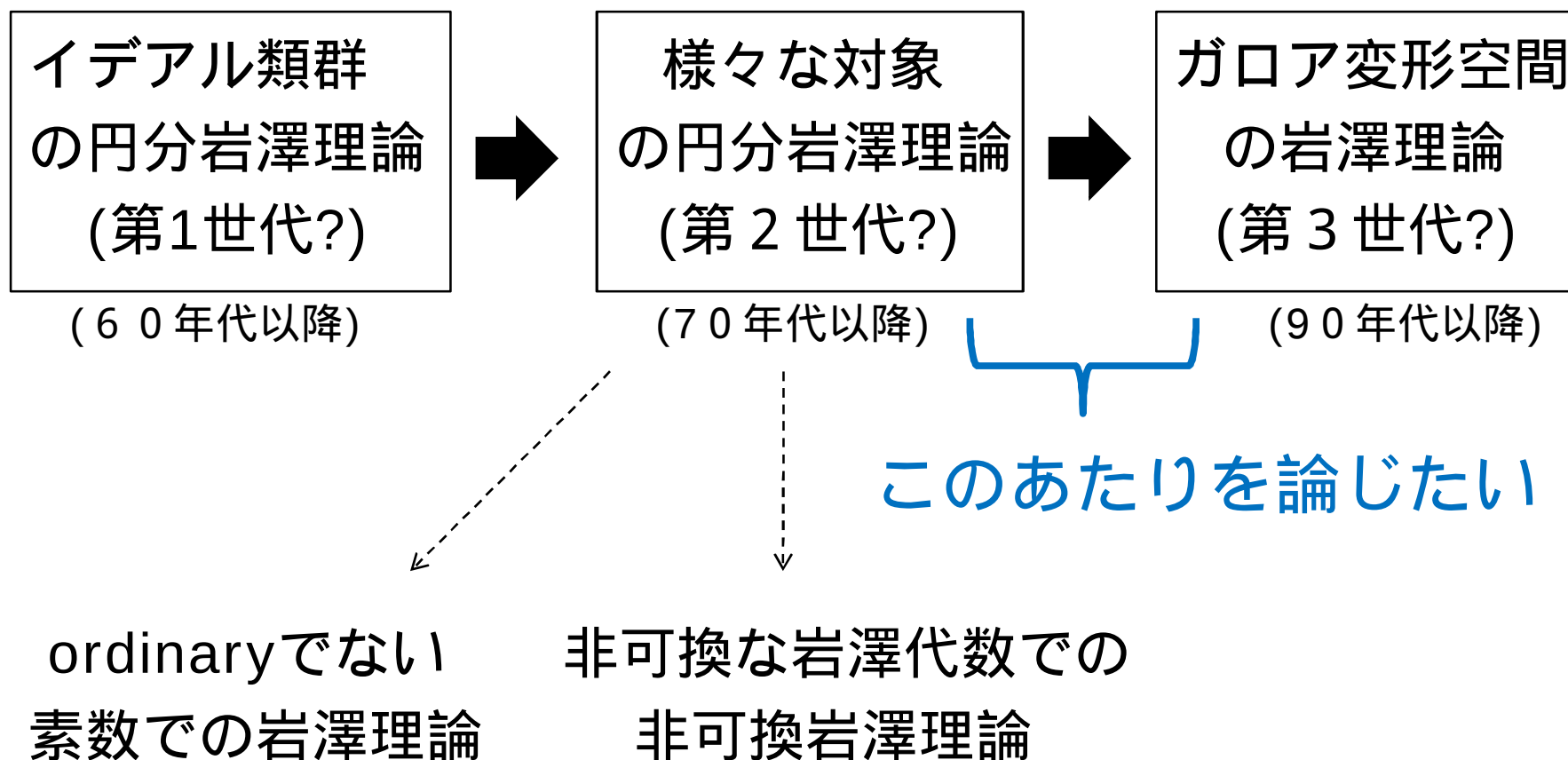


岩澤理論の一般化について

特にガロア表現の変形の観点から

大阪大学理学研究科 落合理

岩澤理論の枠組みの進展



古典的な岩澤理論(第1世代)

函数体の理論の類似



A. 理論的側面？

イデアル類群の
円分岩澤理論

B. 応用的側面？



イデアル類群の
振る舞いの探究

代数体と函数体（代数曲線）は類似している

代数体($\mathbb{Q}$ の有限次拡大) 函数体 $\mathbb{F}_q(C)$

代数体のイデアル類群 $\longleftrightarrow$ 代数曲線 C の因子類群

デデキントゼータ函数 $\longleftrightarrow$ 代数曲線の合同ゼータ
(リーマン予想) (リーマン予想はWeilの
定理の系として解決済)

函数体上の合同ゼータ関数

C を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の代数曲線

ゼータ関数 $Z(C, t) = \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\#C(\mathbb{F}_{q^n}) t^n}{n} \right)$

とするとき

定理(Weil)

$$Z(C, t)(1 - t)(1 - qt) = \det(1 - \text{Frob}_q t; D_{C \otimes \overline{\mathbb{F}}_q} [l^\infty])$$

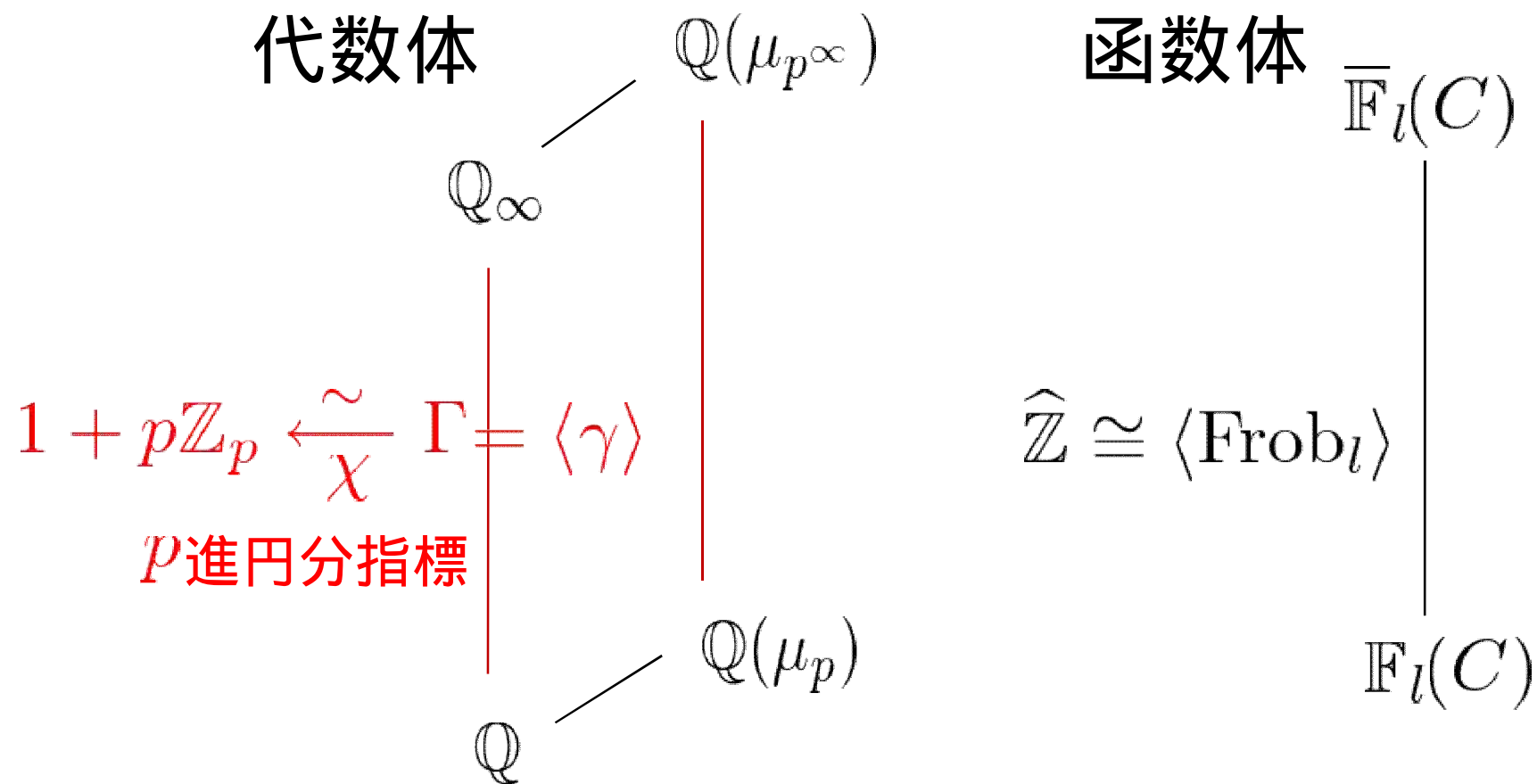
(ゼータ関数 = フロベニウス作用素の行列式)

$\overline{\mathbb{F}}_q$ 上の因子類群 $D_{C \otimes \overline{\mathbb{F}}_q}$ の l ベキ部分群



問. 代数曲線の合同ゼータは定数体 $\mathbb{F}_q$ の無限次
拡大のガロア群から「ゼータ函数の行列式
表示」をもった. この定数体の拡大の類似は
代数体で存在するだろうか?

岩澤氏のみつけた $\overline{\mathbb{F}}_l(C)$ の代数体類似



円分岩澤代数 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ とは

1. 定義としては, $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]] = \varprojlim_U \mathbb{Z}_p[\Gamma/U]$

(U は開部分群をはしる)

2. 岩澤-Serre の同型: 巡回群 Γ の位相的生成元

$$\mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \cong \mathbb{Z}_p[[Y]], \quad \gamma \mapsto 1 + Y$$

がある.

3. 連続指標の空間 $\mathfrak{X} = \{\phi : \Gamma \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times\}$

を考えると, $\mathfrak{X}$ は $1 \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ のまわりの半径1の
 p 進単位開円盤に同型

4. $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ は $\mathfrak{X}$ 上の函数環である.
(実際, $\phi \in \mathfrak{X}$ は写像 $\phi : \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ をひきおこす. これは $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ の各元を $\phi \in \mathfrak{X}$ で evaluate していることに他ならない)

補題(一致の定理)

$f \in \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ とする.

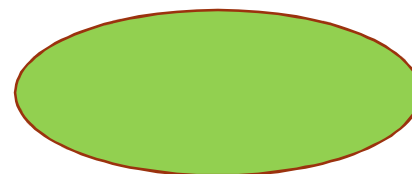
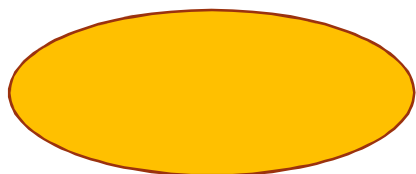
$f(\phi) = 0$ が無限個の異なる $\phi \in \mathfrak{X}$ で成り立つならば, $f = 0$ である.

以上より次のような類似がある

p 進

無限素点

Γ の指標の空間 $\mathfrak{X}$ $\longleftrightarrow$ 複素平面 $\mathbb{C}$ の単位開円盤
($\overline{\mathbb{Q}_p}$ の単位開円盤)



$\mathfrak{X}$ 上の函数環 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ $\longleftrightarrow$ 単位開円盤上の正則函数の環
(岩澤代数)

以上の準備の下

次のようなWeilの定理の類似を論じたい.

合同ゼータ函数 $\longrightarrow$ 解析的 p 進 L 函数

因子類群の行列式 $\longrightarrow$ 代数的 p 進 L 函数

Weilの定理 $\longrightarrow$ 岩澤主予想

解析的 p 進 L 函数

—— 合同ゼータの代数体類似 ——

定理A (久保田-Leopoldt, 岩澤, Coleman)

非自明なDirichlet 指標 ψ に対して

$L_p^{\text{anal}}(\psi) \in \mathbb{Z}_p[\psi][[\Gamma]]$ で補間性質:

$$\chi^n \eta(L_p^{\text{anal}}(\psi)) = L(\psi\omega^{-n}\eta, n)$$

によって特徴づけられるものが存在する.

n は $\psi(-1) = (-1)^{1-n}$ なる偶奇をもつ負の整数

η は Γ の有限指標をわたる.

$L(\psi\omega^{-n}\eta, s)$ はDirichletの L 函数,

ω はTeichmuller 指標とする.

代数的 p 進 L 函数

— フロベニウス行列式の代数体類似 —

- イデアル類群 $\text{Cl}(\mathbb{Q}(\zeta_{Np^n}))[p^\infty]$ の順極限の
ポントリャーギン双対 (の ψ -部分)

$$X^\psi = (\varinjlim_n \text{Cl}(\mathbb{Q}(\zeta_{Np^n}))[p^\infty]^\psi)^{\text{PD}}$$

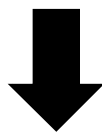
Pontrjagin 双対を意味する

はコンパクトな Γ -加群. よって, X^ψ は自然に
 $\mathbb{Z}_p[\psi][[\Gamma]]$ -加群となる.

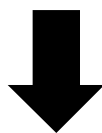
定理B (岩澤)

X^ψ は有限生成 **ねじれ** $\mathbb{Z}_p[\psi][[\Gamma]]$ -加群となる.

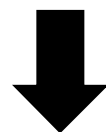
M を有限生成ねじれ $\mathcal{O}[[\Gamma]]$ -加群
($\mathcal{O}$ は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の整数環)



核と余核が有限な写像 $M \rightarrow \bigoplus_i \mathcal{O}[[\Gamma]]/(f_i)$ が存在.
イデアル $\prod_i (f_i) \subset \mathcal{O}[[\Gamma]]$ は上の表示に依らない



これを $\text{char}_{\mathcal{O}[[\Gamma]]}(M)$ と記し特性イデアルとよぶ.



$(L_p^{\text{alg}}(\psi)) = \text{char}_{\mathbb{Z}_p[\psi][[\Gamma]]}(X^\psi)$ とおく.

$\text{char}_{\mathcal{O}[[\Gamma]]}(M)$ は γ の作用に関する行列式とも見なせるが
それについては立ち入らない.

岩澤主予想

— Weilの定理の代数体類似 —

岩澤によって出された岩澤予想はMazur-Wilesにより解決された.

定理C (Mazur-Wiles)

$\mathbb{Z}_p[\psi][[\Gamma]]$ におけるイデアルの等式

$$(L_p^{\text{anal}}(\psi)) = (L_p^{\text{alg}}(\psi))$$

がある.

応用など

- 岩澤の類数公式

定理(岩澤)

不変量 λ_p, μ_p, ν_p が存在して, 十分大きな n に対して $\#Cl(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}))[p^\infty] = p^{\lambda_p n + \mu_p p^n + \nu_p}$ になりたつ.

- 虚数乗法をもつ楕円曲線のBSD予想の部分結果

定理(Coates-Wiles)

$E/\mathbb{Q}$ を虚数乗法をもつ楕円曲線とする. このとき, もし $\zeta_E(1) \neq 0$ ならば, $E(\mathbb{Q})$ は有限群である.

p 進表現の円分岩澤理論 (第2世代?)

Mazur, Manin (楕円曲線の場合)やそれに続く人々
(Greenberg, Coates, Perrin-Riou, Rubin, 加藤etc)
らによって

適当な設定を満たすガロア表現

$$T \cong \mathcal{O}^{\oplus d} \underset{\rho}{\curvearrowright} \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

に対して岩澤理論的な研究を行い, 定理A,B,Cの類似
が追及された (以下で述べる予想A,B,Cが対応する)

設定

(1) 連続なガロア表現 $T \cong \mathcal{O}^{\oplus d} \underset{\rho}{\curvearrowright} \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$

($\mathcal{O}$ は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の整数環)

(2) ρ は既約で有限個の素点を除いて不分岐.

(3) ρ の分解群 D_p への制限 $\rho|_{D_p}$ は, よい拡大:

$$0 \rightarrow F^+T \rightarrow T \rightarrow F^-T \rightarrow 0$$

をもつ (概通常とよばれる条件).

(4) 幾何的(あるモチーフに付随したガロア表現と
なっている)かつ(Deligne-志村の意味での)Critical
という条件をみたす.

条件をみたすガロア表現の例

(例 1) $T = \mathbb{Z}_p(n)$ のとき, T は常に幾何的である.
 T が critical $\longleftrightarrow n$ が正の偶数または負の奇数

(例 2) 重さ $k \geq 2$ の固有カスプ形式 f の j -Tate
ひねり $T = T_f(j)$ は常に幾何的である.
 T が critical $\longleftrightarrow 1 \leq j \leq k - 1$

先の条件をみたすガロア表現 T に対して,

$$L(T, s) = \prod_{\substack{l: \text{不}\text{分}\text{岐} \\ \text{な}\text{素}\text{数}}} \det(1 - l^{-s} \text{Frob}_l; T)^{-1} \times (\text{悪い素数でのEuler因子})$$

とHasse-Weil L 関数を定める.

例 1 の $T = \mathbb{Z}_p(n)$ のときは, $L(T, s) = \zeta(s + n)$
($\zeta(s)$ はリーマンのゼータ函数)

例 2 の $T = T_f(j)$ のときは, $L(T, s) = L(f, s + j)$
($L(f, s)$ はヘッケの L 関数)

予想A (解析的 p 進 L 函数の存在)

T に対応するモチーフの複素周期 $\Omega_\infty \in \mathbb{C}^\times / \overline{\mathbb{Q}}^\times$ をとる.

予想A (Coates — Perrin-Riou)

Ω_∞ に依存する $L_p^{\text{anal}}(T) \in \mathcal{O}[[\Gamma]]$ で補間性質:

$$\phi(L_p^{\text{anal}}(T)) = \alpha^{-c(\phi)} G(\phi) \frac{L(T, \phi, 0)}{\Omega_\infty}$$

によって特徴づけられるものが存在する.

ϕ は非自明な Γ の有限指標

$L(T, \phi, s)$ は ϕ でひねられた T の L 函数

$G(\phi)$ はガウス和, $c(\phi)$ は ϕ の導手の p -order,

α は p Euler 因子の p -unit root.

予想B(代数的 p 進 L 函数の存在)

セルマー群(イデアル類群の一般化)

$(\mathbb{Z}_p)^{PD} \cong \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ を用いて $A = T \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\mathbb{Z}_p)^{PD}$ とすると, 勝手な代数拡大に対して

$$\mathrm{Sel}_A(K) = \mathrm{Ker}[H^1(K, A) \rightarrow \prod_{\mathfrak{p}|p} H^1(I_{\mathfrak{p}}, F^- A) \times \prod_{\lambda \nmid p} H^1(I_{\lambda}, A)]$$

でセルマー群を定義する. $\mathrm{Sel}_A(\mathbb{Q}_{\infty})^{PD}$ は有限生成 $\mathcal{O}[[\Gamma]]$ 加群の構造をもつ.

予想B

$\mathrm{Sel}_A(\mathbb{Q}_\infty)^{PD}$ は有限生成ねじれの $\mathcal{O}[[\Gamma]]$ 加群となる.

$\mathrm{Sel}_A(\mathbb{Q}_\infty)^{PD}$ の特性イデアルを
 $(L_p^{\mathrm{alg}}(T)) \subset \mathcal{O}[[\Gamma]]$ とおく.

予想C (岩澤主予想)

予想C

予想 1 と予想 2 の状況の下で, $\mathcal{O}[[\Gamma]]$ のイデアルの等式:

$$(L_p^{\text{anal}}(T)) = (L_p^{\text{alg}}(T))$$

が成り立つ。

知られている結果

- $T \hookrightarrow \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が階数 1 をもつとき
 $T \cong \mathcal{O}(\psi) \otimes \mathbb{Z}_p(n)$ より

$$\begin{cases} \text{Sel}_A(\mathbb{Q}_\infty)^{\text{PD}} \cong X^\psi(-n) \\ L(T, s) = L(\psi, s + n) \end{cases}$$

であるから

予想A $\longleftrightarrow$ 久保田-Leopoldt, 岩澤, Colemanの定理

予想B $\longleftrightarrow$ 岩澤の定理

予想C $\longleftrightarrow$ Mazur-Wilesの定理

である.

- T が階数2をもつとき, 先の条件の下で
 T はある重さ $k \geq 2$ のカスプ形式 f に付随する
ガロア表現 T_f であると予想されている (Fontaine-Mazur).

この場合は, 「モジュラー形式の円分岩澤理論」
を考えることに対応する
(f の重さが2でフーリエ係数が有理数ならば
「楕円曲線の円分岩澤理論」に対応).

予想A $\longleftrightarrow$ Manin, Mazur-Tate-Teitelbaumが解決
(モジュラーシンボルによる p 進 L 函数の構成)

予想B $\longleftrightarrow$ Rubinの定理 (f が虚数乗法をもつとき)
加藤の定理 (f が虚数乗法をもたないとき)
それぞれ楕円単数やジーゲル単数を使ってEuler系
をガロアコホモロジーの中に構成.

よいオイラー系が存在 $\longrightarrow$ 予想Bが正しい.
円分変形のEuler系の理論
(加藤-PerrinRiou-Rubin)

予想Cも上記のEuler系の帰結として多くのことが
わかっている.

定理([Rubin] + $\in$ [O-Prasanna])

f が虚数乗法をもつとき, $(L_p^{\text{anal}}(T_f)) = (L_p^{\text{alg}}(T_f))$

(f の重さが2より大きいとき, 解析的 p 進 L 函数の定数倍を正しく定めるに
は[O-Prasanna]の議論が必要!)

定理(加藤)

f が虚数乗法をもたないとき, 定数倍を除いて

$$(L_p^{\text{anal}}(T_f)) \subset (L_p^{\text{alg}}(T_f))$$

高次元のモジュラー形式の合同から次が示されている

定理(Skinner-Urban, in preparation?)

代数群 $U(2,2)$ のガロア表現の存在予想を仮定する.

このとき, 適当な局所条件の下で次が成立する:

$$(L_p^{\text{anal}}(T_f)) \supset (L_p^{\text{alg}}(T_f))$$

- T の階数 ≥ 3 のとき, 知られている例は少ない.
 ただ, 先の T_f から得られる階数3のガロア表現:

$$T = \text{ad}(T_f) = \text{End}_{\mathcal{O}}(T_f)^{\text{tr}=0}$$
 (adjoint表現とよばれる) に関しては,

$T_f \otimes \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p$ のセルマー群
 = 剰余表現ガロア表現 $\bar{\rho}_f$ の変形環 $R_{\bar{\rho}_f}$ の接空間

T_f の p 進 L 関数
 = ヘッケ環 $\mathbb{T}_{\bar{\rho}_f}$ の接空間の特性イデアル

$\text{ad}(T_f)$ の岩澤主予想 $\longleftrightarrow R_{\bar{\rho}} = \mathbb{T}_{\bar{\rho}}$ 定理

- Mazurのガロア表現の変形理論から眺めると円分拡大という特別な方向の変形のみを考えている
- 変形理論の空間を前面にだして岩澤理論をとらえると幾何的な視点で理論を見直すことができる.



より普遍的かつより幾何的な(次世代の)岩澤理論へ
向かっていきたい!

ガロア変形の岩澤理論（第3世代？）

設定

(0) 剰余体が標数 p の有限体となる完備局所環 R
(例えば, $R = \mathcal{O}[[X_1, \dots, X_d]] \dots$ など)
(このような R を変形環とよぶ)

(1) 連続な表現 $T \cong R^{\oplus d} \underset{\sim \rho}{\curvearrowright} \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$

(2) $\tilde{\rho}$ は既約で有限個の素点の外で不分岐

設定のつづき

(3) $\tilde{\rho}$ の分解群 D_p への制限 $\tilde{\rho}|_{D_p}$ は, よい拡大:

$$0 \rightarrow F^+T \rightarrow T \rightarrow F^-T \rightarrow 0$$

をもつ (概通常とよばれる条件).

(4) Zariski位相で稠密な $\mathfrak{X}(R) = \{\kappa : R \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p\}$

の部分集合 S があり $\forall \kappa \in S$ に対して

$\kappa(T) = T \otimes_R \kappa(R)$ は幾何的でcriticalな p 進
表現

歴史的な注意

Greenbergは上記のような設定で岩澤理論を研究することを以下の論文で発表した:

Iwasawa theory and p-adic
deformations of motives,
Proceedings of Symposia in Pure
Math. 55 II (1994), 193-223.

この場合に, 予想A,B,Cを提案しているが, 次のように不十分でもあった.

- 予想の定式化があいまいかつ不正確である.
- 予想が成り立つ非自明な例をひとつも示せていない.

予想A(解析的 p 進 L 函数の存在)

簡単のため、以下の予想A,B,Cでは剰余表現は既約としておく!

予想A $L_p^{\text{anal}}(T) \in R$ が存在して、 $\kappa \in S$ に対して次の補間性質で特徴づけられる:

$$\frac{\kappa(L_p^{\text{anal}}(T))}{\Omega_{p,\kappa}} = E_\kappa \frac{L(\kappa(T), 0)}{\Omega_{\infty,\kappa}}$$

E_κ は代数的数(ガウス和や $\kappa(T)$ の p オイラー因子などの積)

$\Omega_{p,\kappa} \in \mathbb{C}_p$, $\Omega_{\kappa,\infty} \in \mathbb{C}$ は p 進周期と複素周期をあらわす.

予想Aに関する注意

- E_κ の項は正確に述べなかったが、第2世代の岩澤理論から変わりではなく $\kappa(T)$ からどのように定まるかは標準的に予想できる.
- 第2世代の岩澤理論では唯1つのモチーフを固定してそのtwistだけを考えていた. 第3世代における大きな違いは、 p 進周期 $\Omega_{p,\kappa}$ が必要になる点である. 実際、 T は無限個の異なるモチーフを含むため、周期というnon-canonicalな不変量を各モチーフごとに正規化しなければいけない.

予想B(代数的 p 進 L 函数の存在)

$\mathcal{A} = T \otimes_R R^{\text{PD}}$ とおくとき

$$\text{Sel}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Q}) = \text{Ker}[H^1(\mathbb{Q}, \mathcal{A}) \rightarrow H^1(I_p, F^- \mathcal{A}) \times \prod_{l \nmid p} H^1(I_l, \mathcal{A})]$$

でセルマー群を定義できる.

$\text{Sel}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Q})^{\text{PD}}$ は有限生成 R 加群になる.

予想B

$\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Q})^{\mathrm{PD}}$ は有限生成ねじれ R 加群となる.

この予想の下で

$\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Q})^{\mathrm{PD}}$ の特性イデアルを
 $(L_p^{\mathrm{alg}}(T)) \subset R$ とおく.

予想C(岩澤主予想)

予想C

予想 1 と予想 2 の状況の下で, R
のイデアルの等式:

$$(L_p^{\text{anal}}(T)) = (\text{補正イデアル}) (L_p^{\text{alg}}(T))$$

が成り立つ.

注: この補正イデアルは大抵は自明であり, 実際のところGreenbergの論文では考慮されていない. 論文([O2006])の例の中で調べられている.

前世代の岩澤理論との関係

- $\mathcal{T}$ の階数 1 のときは,

$\mathcal{T}$ の第 3 世代の岩澤理論 $\equiv$ 第 1 世代の岩澤理論

実際,

$\mathcal{O}[[\Gamma]](\tilde{\chi})$: $\mathcal{O}[[\Gamma]]$ 上階数 1 のガロア表現で
普遍円分指標 $\tilde{\chi} : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \twoheadrightarrow \Gamma \hookrightarrow \mathcal{O}[[\Gamma]]^\times$
が作用するもの

適当な Dirichlet 指標 ψ が存在して

$$\mathcal{T} \cong \mathcal{O}[[\Gamma]](\tilde{\chi}) \otimes \psi \quad \text{modulo Tate twist}$$

- 一般に $T \cong \mathcal{O}^{\oplus d} \curvearrowright \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ を 第2世代の岩澤理論 の設定をみたすような p 進表現とする.

このとき, $T = T \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}[[\Gamma]](\tilde{\chi})$ とおくと
(これを T の円分変形とよぶ)

第3世代の岩澤理論の設定をみたす.

Shapiroの補題から

$$\text{Sel}_A(\mathbb{Q}) = \text{Sel}_A(\mathbb{Q}_{\infty})$$

がわかり, 代数的 p 進 L 関数は互いに等しい.
解析的な側でも同様.

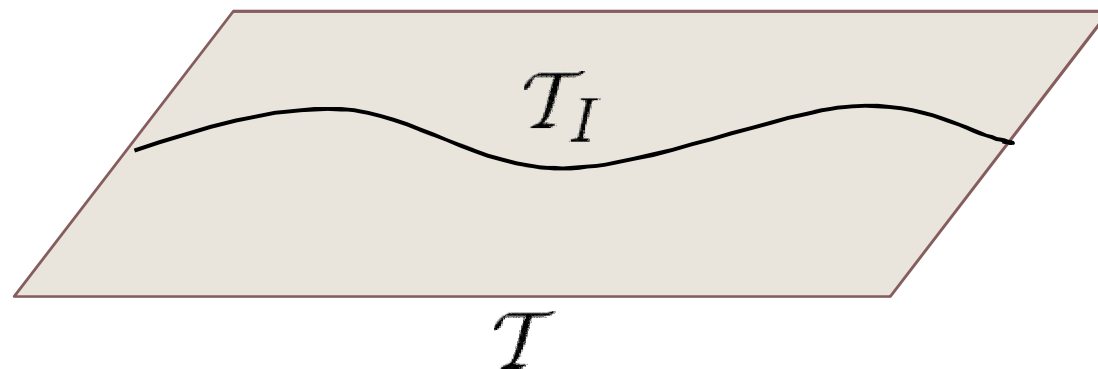
T に対する (第2世代の) 予想 A, B, C

||

$T \otimes \mathcal{O}[[\Gamma]](\tilde{\chi})$ に対する (第3世代の) 予想 A, B, C

変形空間の岩澤理論に関する注意

1. 変形環の特殊化 $R \rightarrow R/I$ があったとき，特殊化で得られる変形 $\mathcal{T}_I = \mathcal{T} \otimes_R R/I$ を考えることができる．稠密なcritical特殊化の存在条件(4) 以外は自動的に満たされる．
2. $\mathcal{T}$ 全体で予想A,B,Cが成立したとき，閉部分空間 $\mathcal{T}_I$ にもそれが伝播するだろうか？



- 解析的 p 進 L 関数は補間性質で特徴づけられるので
 $L_p^{\text{anal}}(T) \in R$ が存在 $\longrightarrow L_p^{\text{anal}}(T_I) \in R/I$ が存在
R/I への特特殊化

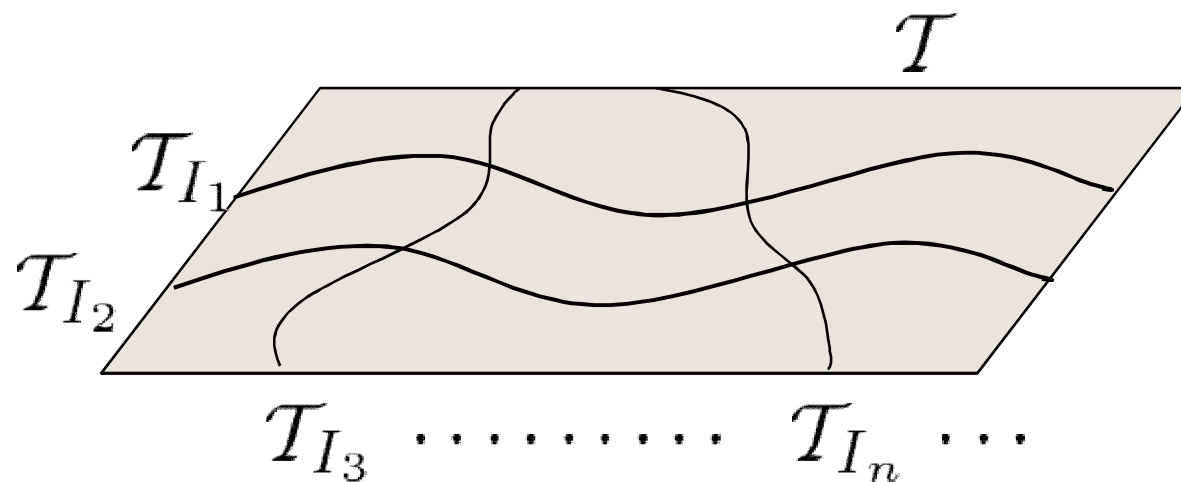
T に関する予想 1 $\longrightarrow T_I$ に関する予想 1

- 一方で $L_p^{\text{alg}}(T) \in R$ の R/I への特特殊化と $L_p^{\text{alg}}(T_I)$ の関係は自明でない (「セルマー群のコントロール定理 [O2001]」で調べた)

T に関する予想2 $\dashrightarrow T_I$ に関する予想2
 T に関する予想3 $\dashrightarrow T_I$ に関する予想3

かなり一般的な条件の下で成立

3. 逆に, 部分空間たちにおける結果から全体の結果を「復元」できるだろうか?



一般には、「超曲面」 $\mathcal{T}_{I_1}, \mathcal{T}_{I_2}, \dots, \mathcal{T}_{I_n}, \dots$
での結果から全体の空間 $\mathcal{T}$ での結果を「復元」
することはできない(反例あり).

適当な条件下では可能なことがある.

命題([O-Prasanna, preprint] + [O2001])

- $\mathcal{T}$ 全体において予想Aが成立
- 無限個の超曲面 $\mathcal{T}_{I_1}, \mathcal{T}_{I_2}, \dots, \mathcal{T}_{I_n}, \dots$ で予想A, B, Cが成立
- いずれかの超曲面において μ 不変量が自明



$\mathcal{T}$ 全体で予想A, B, Cが成り立つ.

階数2のガロア表現の場合

階数2の剰余表現

$$\bar{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow GL_2(\mathcal{O}/(\varpi))$$

で次をみたすものが与えられたとする.

- $\bar{\rho}$ はモジュラーなガロア表現.
- $\bar{\rho}$ は概通常.
- $\bar{\rho}$ は既約 (技術的な条件).

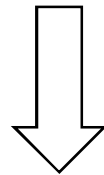
肥田理論によって変形環 $R_{\bar{\rho}}$ と $T_{\bar{\rho}}/\mathfrak{M}_{\bar{\rho}}T_{\bar{\rho}} \cong \bar{\rho}$ なる $T_{\bar{\rho}} \cong R_{\bar{\rho}}^{\oplus 2} \curvearrowright \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が存在して, 組 (f, η) で

- f は重さ $k \geq 2$ でレベル N の通常的固有力スプ形式で $\rho_f \equiv \bar{\rho} \pmod{\varpi}$ なるもの
- η は Γ の指標

なるものに対し, 一意的に $\kappa_{(f, \eta)} : R_{\bar{\rho}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ が存在して, $T_{\bar{\rho}} \otimes_{R_{\bar{\rho}}} \kappa(R_{\bar{\rho}}) \cong T_f \otimes \eta$ が成り立つ.

$R_{\bar{\rho}}$ は 2 変数べき級数環 $\mathcal{O}[[X, Y]]$ 上有限平坦な環である.

- $\mathcal{I}_{\bar{\rho}}$ は $\bar{\rho}$ を剰余表現にもつ変形をすべて含む普遍変形である.
- $\mathcal{I}_{\bar{\rho}}$ 自身は条件(0)から(4)をみたす.



$\mathcal{I}_{\bar{\rho}}$ で予想A,B,Cを調べれば階数 2 の場合は本質的にカバーされる.

予想Aに関しては次の仕事がある.

定理 (北川)

$L_p^{\text{anal}}(\mathcal{T}_{\bar{\rho}}) \in R_{\bar{\rho}}$ が存在して次の補間性質をみたす:

$$\frac{\kappa_{(f, \chi^j \phi)}(L_p^{\text{anal}}(\mathcal{T}_{\bar{\rho}}))}{\Omega_{f,p}} = (-1)^{j-1} (j-1)! \left(\frac{p^{j-1}}{a_p(f)} \right)^{c(\phi \omega^{-j})} \\ \left(1 - \frac{\phi \omega^{-j}(p) p^{j-1}}{a_p(f)} \right) G(\phi \omega^{-j}) \frac{L(f, \phi \omega^{-j}, j)}{(2\pi \sqrt{-1})^j \Omega_{f,\infty}}$$

ϕ は位数有限の指標

$k(f)$ を f の重さとするとき $1 \leq j \leq k(f) - 1$ をみたす $(f, \chi^j \phi)$ をわたる.

$\Omega_{f,p}$ は $\overline{\mathbb{Z}}_p^\times$ の元.

北川の仕事と関連する結果について

現在おおまかに 2 通りのアプローチがある

- モジュラーシンボルの肥田変形を使った構成
([北川], [Greenberg-Stevens], [太田])
- Rankin-Selberg法による構成
([Panchishkin], [深谷], [O2003])

北川以外の多くの結果は若干不完全なところがある.
例えば, Greenberg-Stevensの結果では

- p 進周期は必ずしも p 進単数でない.
- $\kappa(f, \chi^j \phi)$ の定義されない $(f, \chi^j \phi)$ があり得る.

予想Bに関する結果

f を重さ $k \geq 2$ でレベル N の通常的固有カスプ形式で $\rho_f \equiv \bar{\rho} \pmod{\varpi}$ なるものとする
高さ 1 のイデアル $I_f \subset R_{\bar{\rho}}$ で

$$T_{\bar{\rho}}/I_f T_{\bar{\rho}} \cong T_f \otimes \mathcal{O}[[\Gamma]](\tilde{\chi})$$

なるものが存在する.

自然な射

$$\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_{\bar{\rho}}}(\mathbb{Q})^{\mathrm{PD}}/I_f \mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_{\bar{\rho}}}(\mathbb{Q})^{\mathrm{PD}} \rightarrow \mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_{\bar{\rho}}[I_f]}(\mathbb{Q})^{\mathrm{PD}}$$

のkernelとcokernelを調べる問題を「セルマー群のコントロール定理」とよぶ.

加藤-Rubinの結果より $\text{Sel}_{\mathcal{A}_{\bar{\rho}}[I_f]}(\mathbb{Q})^{\text{PD}}$ はねじれ
 $R_{\bar{\rho}}/I_f R_{\bar{\rho}}$ 加群



コントロール定理

$\text{Sel}_{\mathcal{A}_{\bar{\rho}}}(\mathbb{Q})^{\text{PD}} / I_f \text{Sel}_{\mathcal{A}_{\bar{\rho}}}(\mathbb{Q})^{\text{PD}}$ はねじれ
 $R_{\bar{\rho}}/I_f R_{\bar{\rho}}$ 加群



中山の補題

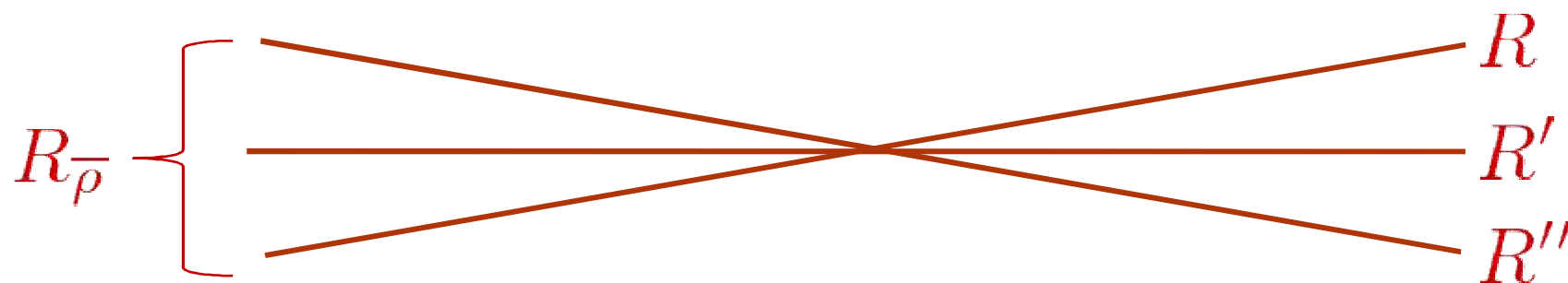
$\text{Sel}_{\mathcal{A}_{\bar{\rho}}}(\mathbb{Q})^{\text{PD}}$ はねじれ $R_{\bar{\rho}}$ 加群



予想Bは正しい

予想C (岩澤主予想)に関する結果

正確を期するために, 少し細かい状況に立ち入る.



我々の変形環 $R_{\bar{\rho}}$ は一般には, いくつかの成分に分かれている. 各成分 $(R, R', R'', \dots)$ は $R_{\bar{\rho}}$ の高さ 0 の素イデアルでの局所化である.

以下成分 R と $T = \mathcal{T}_{\bar{\rho}} \otimes_{R_{\bar{\rho}}} R$ を固定する.

$\mathcal{T}$ が虚数乗法をもつとき, Rubinによる虚2次体の岩澤理論と関係がある.

虚2次体の岩澤主予想(Rubinの定理)

Katzの2変数解析的 p 進 L 函数 $\overset{=}{=} \overset{=}{\text{虚2次体の } \mathbb{Z}_p^2 \text{ 拡大上のガロア群の特性イデアル}}$

Question!

Shapiroの補題
の応用で証明

$(L_p^{\text{anal}}(\mathcal{T})) \text{ ----- } (L_p^{\text{alg}}(\mathcal{T}))$

第3世代の岩澤主予想(予想C)

通常複素周期 $\Omega_{f,\infty}$ と Katz の p 進 L 函数に現れる複素周期 Ω_{∞}^{k-1} との間の比較の問題など...

定理([O-Prasanna, preprint])

$\mathcal{T}$ が虚数乘法をもつと仮定する. また, 肥田変形 $\mathcal{T}$ の特殊化に現れるある虚数乘法をもつ重さ ≥ 2 のカスプ形式 f で $L_p^{\text{anal}}(f)$ は自明な μ 不変量をもつと仮定する.

このとき Question の等式が成り立つ (よって 予想Cが正しい).

T が虚数乗法をもたないとき, 次の結果がある:

定理([O2003]+[O2005]+[O2006])

次を仮定する:

(a) R は 2 変数べき級数環と同型になる.

(b) $\bar{\rho}$ の像は十分大きい.

このとき, 次の不等式が成立する

$$(L_p^{\text{anal}}(T)) \subset (L_p^{\text{alg}}(T))$$

証明にはオイラー系の理論を用いる.

証明のアイデア

$$\begin{array}{ccc}
 R/(L_p^{\text{anal}}(\mathcal{T})) & & \text{char}_R(\text{Sel}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Q})^{\text{PD}}) \\
 \textcircled{1} \parallel & & \subset \textcircled{2} \\
 \text{char}_R(H^1(\mathbb{Q}_p, F^-T^*)/R\mathcal{Z}) & &
 \end{array}$$

- $\mathcal{Z}$ は加藤のEuler系(を肥田変形に伸ばしたもの)
- ①の等式はColeman写像の理論を変形へ一般化したもの([O2003])
- ②の等式はEuler系の理論の一般の変形への一般化([O2005])による (ここで仮定(a),(b)を用いる)

総実体への一般化

d 次総実体 F を考える.

先と同様に剰余表現

$$\bar{\rho} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}/(\varpi))$$

で次をみたすものを考える:

- $\bar{\rho}$ はモジュラーなガロア表現.
- $\bar{\rho}$ は概通常.
- $\bar{\rho}$ は既約 (技術的な条件).

肥田理論によって変形環 $R_{\bar{\rho}}$ と $T_{\bar{\rho}}/\mathfrak{M}_{\bar{\rho}}T_{\bar{\rho}} \cong \bar{\rho}$ なる $T_{\bar{\rho}} \cong R_{\bar{\rho}}^{\oplus 2} \curvearrowright \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が存在して, 組 (f, η) で

- f は重さ $k \geq (2, \dots, 2)$ かつレベル n の通常的固有カスプ形式で $\rho_f \equiv \bar{\rho} \pmod{\varpi}$ なるもの
- η は Γ の指標

なるものに対し, 一意的に $\kappa_{(f, \eta)} : R_{\bar{\rho}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ が存在して, $T_{\bar{\rho}} \otimes_{R_{\bar{\rho}}} \kappa(R_{\bar{\rho}}) \cong T_f \otimes \eta$ が成り立つ.

Leopoldt予想を仮定すれば, $R_{\bar{\rho}}$ はべき級数環 $\mathcal{O}[[X_1, \dots, X_d, Y]]$ 上有限かつねじれのない環.

次のような条件を考える:

- (a) $\bar{\rho}_f \cong \bar{\rho}$ なる重さ $(k_1, \dots, k_d)$ かつレベル n のカスプ形式 f (n は p と素より ρ_f は crystalline であることに注意) が存在して

$$\sum_i (k_i - 1) < p - 1$$

を満たす.

- (b) $\text{Ind}_{\mathbb{Q}}^F \bar{\rho}$ の像が十分大きい.

予想Aに関する結果

定理(Dimitrov-O, in preparation)

$\bar{\rho}$ に関して, 先の条件(a), (b)を仮定する.

このとき, $L_p^{\text{anal}}(\mathcal{T}_{\bar{\rho}}) \in R_{\bar{\rho}}$ が存在して,

$\frac{k_{\max} - k_{\min}}{2} + 1 \leq j \leq \frac{k_{\max} + k_{\min}}{2} - 1$ をみたす

$(f, \chi^j \phi)$ に対して, 次の補間性質をみたす:

$$\frac{\kappa(f, \chi^j \phi)(L_p^{\text{anal}}(\mathcal{T}_{\bar{\rho}}))}{\Omega_{f,p} \left(1 - \frac{\phi \omega^{-j}(p) p^{j-1}}{a_p(f)}\right) G(\phi \omega^{-j}) \frac{L(f, \phi \omega^{-j}, j)}{(2\pi \sqrt{-1})^j \Omega_{f,\infty}}} = (-1)^{j-1} (j-1)! \left(\frac{p^{j-1}}{a_p(f)}\right)^{c(\phi \omega^{-j})}$$

以下のような事柄が構成のためのポイントとなる.

- 条件(a),(b)により, ヒルベルトモジュラー多様体のベッチコホモロジーがヘッケ環の上の自由加群になる(Dimitrov).
- ヒルベルトモジュラー多様体の上でモジュラーシンボル(サイクル)を使ってMellin変換を計算する.
- d 個のモジュラーな変数と円分変形に関する残りの 1 変数を分離することが必要になる(レベル構造を工夫したり, 単数群の作用などの複雑な状況をきり抜けなければならない).

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K_{11}(p^\alpha) & & \\
 & \subset & & \supset & \\
 K_1(p^\alpha) & & & & \supset ZK_{11}(p^\alpha) \\
 & \supset & & \subset & \\
 & & K_0(p^\alpha) & &
 \end{array}$$

- 肥田変形が虚数乗法をもつ場合はKatzによる p 進 L 函数と関係すると予想される.
- 総実体の上で予想B, 予想Cなどに関しては, 今後の課題である.

まとめ

- 岩澤理論を特に変形の視点から一般化すると肥田変形のような新しい対象にも岩澤主予想が考えられる (Greenberg).
- そのような視点の研究を実際にすすめようとする対象が広がるだけに新しい現象が現れてくる.
(複素周期や p 進周期のとり扱いなど)
- 円分変形でしか確立していない理論や手法(オイラー系の理論や p 進ホッジ理論)を変形空間へと一般化する必要がある.

展望(妄想?) 1

岩澤主予想に以外の岩澤理論における問題を
変形の設定で考えることで何か新しい現象が
見えてこないだろうか.

例えば,

第 1 世代の岩澤理論での未解決問題

「Greenberg予想」の類似はあるだろうか？

展望(妄想?) 2

- 観察 1 (Greenberg-Vatsal)

f : 重さ 1 のカスプ形式 とするとき,
 T_f はcriticalではない(よって普通には岩澤理論を
 考えられない). $T_{\bar{\rho}_f}$ を肥田変形とするとき,

$$T_f \otimes \mathcal{O}[[\Gamma]](\tilde{\chi}) \hookrightarrow T_{\bar{\rho}_f}$$

余次元1の閉部分空間

第3世代の岩澤理論を考えられる

$T_{\bar{\rho}_f}$ は条件(0)-(4)をすべて満たす.

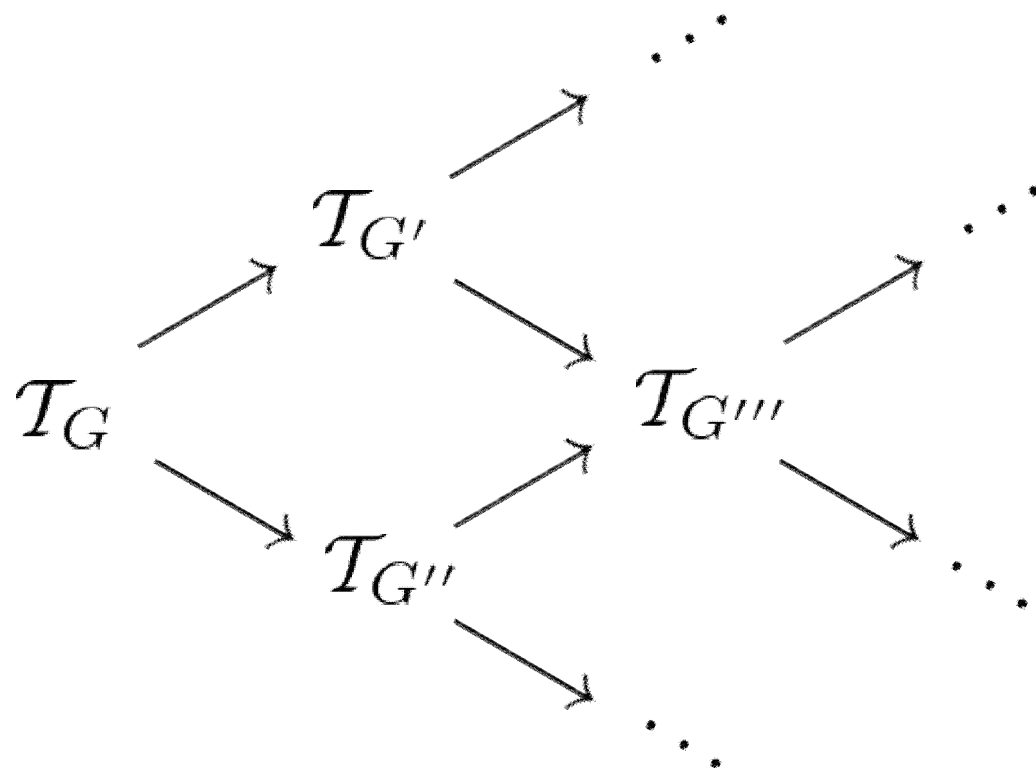
- $GL(2)_K$ (K は虚 2 次体) の肥田変形 $T_{GL(2)_K}$ はあまり多くの幾何的な特殊化をもたない.
(よって普通には岩澤理論を考えられない)

$GSp(4)_{\mathbb{Q}}$ の肥田変形 $T_{GSp(4)_{\mathbb{Q}}}$ は条件(0)-(4)をみたす.

テータ持ち上げにより

$$T_{GL(2)_K} \hookrightarrow T_{GSp(4)_{\mathbb{Q}}}$$

がある.



(より普遍的な)Ind-space上の岩澤理論が
できるだろうか？

終わり

