# CONTINUOUS DEFORMATIONS OF THE RIEMANN ZETA-FUNCTION

鈴木正俊（東大数理）

## 1. 導入

無限個の零点を持つ整関数で, 全ての零点がある一つの直線上にあるものとして, 最も基本的なものは三角関数 $\cos z$ と $\sin z$ であろう. この小論ではこれらを手本にして, Riemann ゼータ関数の零点について考察する.

いま $E(s)=\exp(s-1/2)$ とし, 整関数 $Z(s)$ を

$$Z(s) := \cosh\left(s-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(E(s)+E(1-s)\right) \tag{1.1}$$

で定義する. 定義から明らかに関数等式 $Z(s)=Z(1-s)$ が成り立つ. このとき, $Z(s)$ の零点は全て関数等式の折り返し線 $\Re(s)=1/2$ 上にあり, しかも単純な零点である. この Riemann 予想に類似の事実は, 次のようにして示される. まず指数関数の性質から容易に

$$|E(s)| > |E(1-s)| \quad \text{for} \quad \Re(s) > \frac{1}{2} \tag{1.2}$$

が分かる. これから直ちに $Z(s)$ が $\Re(s)=1/2$ の外で非零であることが導かれる. 実際, (1.2) から $E(s)$ は $\Re(s)>1/2$ に零点を持たず, 分解 $Z(s)=E(s)(1+E(1-s)/E(s))$ から $Z(s)$ も $\Re(s)>1/2$ に零点をもたないことが分かる. 従って関数等式により $Z(s)$ は $\Re(s)=1/2$ の外に零点を持たない. $Z(s)$ の零点が全て単純であることは,

$$E(s) \neq 0 \quad \text{on} \quad \Re(s) = \frac{1}{2} \tag{1.3}$$

から $\arg E(1/2+it)$ が定まり, $E(s)=\overline{E(\bar{s})}$ から

$$Z\Big(\frac{1}{2}+it\Big) = \Big|E\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\Big| \cos\left(\arg E\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\right)$$

と書けて, (1.2) から $\arg E(1/2+it)$ の単調性がでる事から従う (実際, $\arg E(1/2+it)=t$).

このように見ると, $Z(s)$ の Riemann 予想に関して本質的なのは (1.1) と (1.2) で, 零点の単純性には (1.3) が加わる. 同様のことが Riemann ゼータ関数や他の数論的 $L$ 関数についても言えるだろうか? これがこの小論の一つの動機である.

Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ にガンマ因子と極を消す因子を補った整関数

$$\xi(s) = s(s-1)\cdot\pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)\cdot\zeta(s)$$

について考える. 関数等式 $\xi(s)=\xi(1-s)$ はよく知られている. Riemann ゼータ関数の自明な零点と極は $\Gamma(s/2)$ と $s(s-1)$ に相殺されているので, 本来の Riemann 予想は $\xi(s)$ の零点が全て $\Re(s)=1/2$ 上にある事と同値である. 上の $Z(s)$ の例を見れば, 次の疑問は自然であろう.

**Question 1.** 整関数 $E(s)$ で

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\left(E(s)+E^{\vee}(s)\right) \tag{1.4}$$

を満たすものが存在するだろうか?

*Date*: Version of June 16, 2009.

ここで

$$E^{\vee}(s) = \overline{E(1-\bar{s})}.$$

この記号は以下でもしばしば用いられる．$E(s)$ が実軸上実数値なら, (1.4) は (1.2) と同様の $\xi(s) = (E(s) + E(1-s))/2$ を意味することに注意しておこう．もし Question 1 の答えが “Yes” なら, 次の疑問が自然にあがる:

**Question 2.** 等式 (1.4) を満たす整関数 $E(s)$ で次を満たすものが存在するだろうか?

$$|E(s)| > |E^{\vee}(s)| \quad \text{for} \quad \Re(s) > \frac{1}{2}. \tag{1.5}$$

この問題への肯定的解決は, $Z(s)$ の場合と同様な議論により $\xi(s)$ の Riemann 予想を導くから, その解決は困難であることが予想される．そうであるにしても, Question 2 を踏まえれば, Question 1 の等式 (1.4) を満たすような整関数 $E(s)$ を見つけることは, それ自身興味深い問題であるように思われる．我々はこれを Riemann ゼータ関数を連続的に変形することにより発見することを試みる．

## 2. Riemann ゼータ関数の変形族

Jacobi テータ関数 $\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2 x)$ を用いて,

$$\phi(x) := \frac{d}{dx}\Big(x^2 \frac{d}{dx}\theta(x^2)\Big) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\big(2\pi^2 n^4 x^4 - 3\pi n^2 x^2\big)e^{-\pi n^2 x^2}$$

と定義する．よく知られているように, このとき $\xi(s)$ は $\phi(x)$ の Mellin 変換で与えられる:

$$\xi(s) = \mathsf{M}(\phi, s) = \int_0^{\infty} \phi(x)\, x^s \frac{dx}{x} \quad (\forall s \in \mathbb{C}).$$

これをベースにして, $\xi(s)$ の $(0,\infty)$ 上の可測関数 $f$ による変形 $E_f(s)$ を, 形式的に次のように定義する:

$$E_f(s) = \mathsf{M}(\phi f, s) = \int_0^{\infty} \phi(x) f(x)\, x^s \frac{dx}{x}.$$

我々の期待は, テスト関数 $f$ を適当に選べば, $E_f(s)$ が整関数となり, それが等式 (1.4) を満たし, 更には不等式 (1.5) をも満たしてくれることである．このために, 次のようなテスト関数の集合を考える．

**Definition 2.1** 集合 $\mathfrak{F}$ を $(0,\infty)$ 上の区分的に連続な関数 $f$ で, 各点で

$$f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

と正規化されており, 次の 2 つの条件を満たすもの全体から成るものとする*:*

(1) $f(x) + \overline{f(x^{-1})} = 2$,
(2) $f(x) = O(x^A)$ *as* $x \to \infty$ *for some* $A \geqslant 0$.

この様なテスト関数たちに対して, 我々は次の結果を得る．

**Theorem 2.2** (Theorem 1.3 of [10]) 各 $f \in \mathfrak{F}$ について, $E_f(s)$ はある $C_f > 0$ に対して

$$|E_f(s)| \leqslant \exp(C_f |s| \log |s|)$$

を満たす整関数であり, 等式 (1.4) を満たす．

この結果は Question 1 の答えが “Yes” であり, しかも等式 (1.4) を 満たすような整関数 $E(s)$ が無数にあることを示している．ここで Question 2 を念頭に, 次のような 2 つの $\mathfrak{F}$ の部分集合を導入する．

**Definition 2.3** 集合 $\mathfrak{F}$ の部分集合 $\mathfrak{F}^{\star}$ を, $E_f(s)$ が条件 (1.5) を満たすような $f \in \mathfrak{F}$ 全体からなるものとする．また, $\mathfrak{F}^{\star}_{\mathrm{st}}$ を $E_f(1/2 + it) \neq 0$ $(t \in \mathbb{R})$ を満たす $f \in \mathfrak{F}^{\star}$ 全体から成る部分集合をとする．

条件 (1.5) やそれに類似の条件を満たすような整関数の研究には長い歴史があり, 多くの重要な結果があるのだが, 我々の目的にとって特に有用なのが次の結果である.

**Proposition 2.4** (Lemma 5 of de Branges [2], see also Lemma 2.2 of Lagarias [6]) 整関数 $E(s)$ が条件 (1.5) を満たすとき,

$$A(s) = \frac{1}{2}\Big(E(s) + E^{\vee}(s)\Big)$$

の零点は全て垂直線 $\Re(s) = 1/2$ 上にある. さらに, $E(s)$ が $\Re(s) = 1/2$ 上に零点を持たないならば, $A(s)$ の零点は全て単純である.

これから直ちに, $\mathfrak{F}^{\star}\,(\subset \mathfrak{F})$ が空集合でないならば, $\xi(s)$ の零点は全て $\Re(s) = 1/2$ 上にある事が導かれる. ところが, 実はこれの逆も成り立つことが分かる.

**Theorem 2.5** (Theorem 1.5 of [10])

(1) $\mathfrak{F}^{\star} \neq \emptyset$ と, $\xi(s)$ の零点が全て $\Re(s) = 1/2$ 上にあることは同値.
(2) $\mathfrak{F}^{\star}_{\rm st} \neq \emptyset$ と, $\xi(s)$ の零点が全て $\Re(s) = 1/2$ 上にあり, しかも単純であることは同値

この結果から, Riemann 予想と零点の単純性を仮定すれば, 集合 $\mathfrak{F}^{\star}_{\rm st}$ は空集合ではないことが結論される. しかしこれだけでは, 具体的にどのようなテスト関数が集合 $\mathfrak{F}^{\star}_{\rm st}$ に含まれるのかは分からない. これを調べるため, テスト関数 $f \in \mathfrak{F}$ が集合 $\mathfrak{F}^{\star}_{\rm st}$ に属すための十分条件を一つ準備する.

**Proposition 2.6** (Theorem 1.6 of [10]) テスト関数 $f \in \mathfrak{F}$ は実数値をとり, 対応する $E_f(s)$ が次を満たすとする:

(1) ある $\sigma_0 < 1/2$ があって, $E_f(s)$ の零点は全て帯領域 $\sigma_0 < \Re(s) < 1/2$ 内にある.
(2) $T \geqslant 0$ が十分大きいとき,

$$N(T) := |\{\rho \in \mathbb{C} \mid E_f(\rho) = 0,\ |\Im(\rho)| \leqslant T\}| \ll T \log T.$$

(3) ある実定数 $C$ があって, 実軸上で

$$\lim_{\sigma \to +\infty} \frac{E_f(1-\sigma)}{E_f(\sigma)} = C.$$

このとき $f$ は $\mathfrak{F}^{\star}_{\rm st}$ に属す. すなわち $E_f$ は条件 (1.5) を満たし, $\Re(s) = 1/2$ 上で非零.

これを用いると, Riemann 予想と零点の単純性を仮定すれば, 集合 $\mathfrak{F}^{\star}_{\rm st}$ に属すテスト関数を具体的に例示することができる.

**Theorem 2.7** (Theorem 1 of Lagarias [7], see also Theorem 1.7 of [10]) Riemann $\xi$-関数 $\xi(s)$ の零点は全て $\Re(s) = 1/2$ 上にあり, しかも単純であると仮定する. このとき, すべての実数 $\alpha > 0$ に対して

$$f_{\alpha}(x) = 1 + \alpha \log x$$

は Theorem 2.6 の条件 (1)–(3) を満たす. とくに $\{f_{\alpha} \,|\, \alpha \in \mathbb{R}_{>0}\}$ は $\mathfrak{F}^{\star}_{\rm st}$ の部分集合.

**Remark.** 簡単な計算により $E_{f_{\alpha}}(s) = \xi(s) + \alpha\,\xi'(s)$.

## 3. Riemann ゼータ関数の変形の連続パラメータ族

前節の結果を踏まえると, 集合 $\mathfrak{F}^{\star}_{\rm st}$ 自身の構造や, 部分集合 $\mathfrak{F}^{\star}_{\rm st}$ が集合 $\mathfrak{F}$ にどのように入っているのかということに興味がそそられる. この節では, 埋め込み $\mathfrak{F}^{\star}_{\rm st} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ を調べるための一つの試みとして, Theorem 2.7 に登場した 1 パラメータ族 $E_{f_{\alpha}}$ をある意味で近似するような, $E_f$ の 2 パラメータ族を導入する.

**Definition 3.1** 実数 $\alpha > 0$ と複素数 $r \in \mathbb{C}$ に対して,

$$w_{\alpha,r}(x) := \cosh(\alpha \log x)^{-r} = \left(\frac{2}{x^{\alpha} + x^{-\alpha}}\right)^{r}$$

とおく．このとき複素変数 $s$ の関数 $\xi_\alpha(s;r)$ を次の重み付き Mellin 変換で定義する:

$$\xi_\alpha(s;r) := \int_0^\infty \phi(x)\, x^s\, w_{\alpha,r}(x) \frac{dx}{x}.$$

定義から直ちに

$$\xi_\alpha(s;0) = \xi_0(s;r) = \xi(s)$$

が分かる．また, 各 $\alpha \geqslant 0$ と $r \in \mathbb{C}$ に対して, 重み関数

$$W_{\alpha,r}(x) := x^\alpha \cdot w_{\alpha,r}(x)$$

がテスト関数の集合 $\mathfrak{F}$ に属すことも容易に分かる．したがって Theorem 2.2 から $\xi_\alpha(s;r)$ は高々位数 1 の整関数である．

ここで $r=1$ として,

$$E_\alpha(s) := \xi_\alpha(s+\alpha,1) \ \left( = \int_0^\infty \phi(x)\, x^s\, W_{\alpha,1}(x)\, \frac{dx}{x} \right).$$

とおくと, $\alpha \to 0^+$ のとき

$$E_\alpha(s) \sim E_{f_\alpha}(s) = \xi(s) + \alpha\, \xi'(s) \tag{3.1}$$

が成り立つ．ここで $f \sim g$ は $\alpha \to 0^+$ のとき比が 1 に近づくことを意味する．これから $\xi_\alpha(s;1)$ から得られた 1 パラメータ族 $E_\alpha(s)$ は, Theorem 2.7 の 1 パラメータ族 $E_{f_\alpha}(s)$ をある意味で近似していると見なせる．

Theorem 2.7 は Riemann 予想と零点の単純性のもとで, 関数 $f_\alpha$ たちが集合 $\mathfrak{F}_{\mathrm{st}}^\star$ に属すことを主張していた．一方, $W_{\alpha,1}$ たちが集合 $\mathfrak{F}_{\mathrm{st}}^\star$ に属すか否かは, Riemann 予想と零点の単純性を仮定しても明らかではない．この意味で $W_{\alpha,1}$ たちは $f_\alpha$ たちにある意味で近いとは言え, 性質としては劣っているように見える．しかし, 実は $W_{\alpha,r}$ たちは, 次のような $f_\alpha$ には無い, 良い解析的性質を持っている事が分かる．

**Theorem 3.2** (Theorem A of [9]) 各実数 $r$ に対して次が成り立つ*:*

(1) $\xi_\alpha(s;r)$ は実軸上で実数値をとり, 次の関数等式を満たす：

$$\xi_\alpha(s;r) = \xi_\alpha(1-s;r).$$

(2) (decent formula) 与えられた非負実数 $\alpha$ と正整数 $n$ に対して,

$$\xi_\alpha(s;r) = 2^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \xi_\alpha\Big(s-(n-2j)\alpha; r+n\Big).$$

(3) (ascent formula) 与えられた非負実数 $\alpha$ と正実数 $\lambda$ に対して,

$$\xi_\alpha(s;r) = \frac{1}{4\pi i\alpha} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \xi_\alpha(s-z;r-\lambda)\, B\Big(\frac{\lambda}{2}+\frac{z}{2\alpha}, \frac{\lambda}{2}-\frac{z}{2\alpha}\Big)\, dz.$$

ここで $B(p,q)$ はベータ関数, $c$ は $|c| < \alpha\lambda$ を満たす実数.

Theorem 3.2 から各 $\xi_\alpha(s;r)$ は $\xi(s)$ と同様の関数等式をもつ．一方, $E_{f_\alpha}$ はそのような関数等式はもたない．(漸近的関係 (3.1) を踏まえると, $E_\alpha$ の関数等式は $E_{f_\alpha}$ の段階では退化してしまっていると見ることもできる.)

いま decent formula で $n=1$ とすると, 各 $\alpha \geqslant 0$ について

$$\xi_\alpha(s;r) = \frac{1}{2}\Big(\xi_\alpha(s+\alpha;r+1) + \xi_\alpha(s-\alpha;r+1)\Big)$$

であり, 特に Riemann $\xi$-関数について,

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\Big(\xi_\alpha(s+\alpha;1) + \xi_\alpha(s-\alpha;1)\Big)$$

が成り立つ．関数等式に注意すれば, これは等式 (1.4) に他ならない．また, ascent formula で $\lambda = r$ とすると, $\xi_\alpha(s;0) = \xi(s)$ から, 各 $\alpha \geqslant 0$ について

$$\xi_\alpha(s;r) = \frac{1}{4\pi\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(s-iv)\, B\Big(\frac{r}{2}+\frac{iv}{2\alpha}, \frac{r}{2}-\frac{iv}{2\alpha}\Big)\, dv,$$

という表示が得られる．これは $r>0$ のとき $\xi_\alpha(s;r)$ は $\xi(s)$ を垂直方向に平均したものであること述べており, $\xi_\alpha(s;r)$ が $\xi(s)$ より扱い易いことを期待させる.

Theorem 3.2 は $\xi_\alpha(s;r)$ たちが $r$ について相互に関係していることを述べている．これによれば, 例えば $W_{\alpha,1}$ を調べるのに $W_{\alpha,r}$ の $r$ を動かして調べる, というようなことが可能になる．関数等式から $\xi_\alpha(s;r)$ に対する Riemann 予想の類似は明白であるが, これに関する十分条件の一つが, パラメータ $r$ に関する関係を通して述べられる.

**Theorem 3.3** (Theorem D of [9]) 与えられた $\alpha>0$ と $r\in\mathbb{R}$ に対して,

$$\xi_\alpha(s;r)\neq 0 \quad \textit{for} \quad \Re(s)\geqslant \frac{1}{2}+\alpha$$

を仮定する．このとき, 全ての正整数 $n$ について, $\xi_\alpha(s;r-n)$ の零点は全て $\Re(s)=1/2$ 上にあり, しかも単純である.

これより直ちに次の系が得られる．これは $W_{\alpha,r}$ が $r$ というパラメータを $f_\alpha$ よりも余計にもっている事の御利益の一つと言えよう.

**Corollary 3.4** ある正整数 $n$ とある正実数 $\alpha$ に対して $\xi_\alpha(s;n)$ が右半平面 $\Re(s)\geqslant 1/2+\alpha$ に零点を持たないならば, Riemann ゼータ関数に対する Riemann 予想が成り立つ.

**Corollary 3.5** 与えられた $\alpha\geqslant 1$ と任意の正整数 $n$ について, $\xi_\alpha(s;-n)$ の零点は全て $\Re(s)=1/2$ 上にあり, しかも単純である．さらに $\xi(s)$ の Riemann 予想を仮定すれば, 任意の実数 $\alpha$ と正整数 $n$ についてこれが成り立つ.

Theorem 3.2 の decent formula から $\xi_\alpha(s;-n)$ は $\xi(s)$ の線型結合で表される．例えば

$$\begin{aligned}
2\,\xi_\alpha(s;-1) &= \xi(s+\alpha)+\xi(s-\alpha),\\
4\,\xi_\alpha(s;-2) &= \xi(s+2\alpha)+2\,\xi(s)+\xi(s-2\alpha),\\
8\,\xi_\alpha(s;-3) &= \xi(s+3\alpha)+3\,\xi(s+\alpha)+3\,\xi(s-\alpha)+\xi(s-3\alpha)\\
16\,\xi_\alpha(s;-4) &= \xi(s+4\alpha)+4\,\xi(s+2\alpha)+6\,\xi(s)+4\,\xi(s-2\alpha)+\xi(s-4\alpha).
\end{aligned}$$

Corollary 3.5 は, $\alpha\geqslant 1$ なら無条件に, これらの整関数の零点は全て $\Re(s)=1/2$ 上にあり, しかも単純であることを示している．加えて, Theorem 3.3 の証明と同様の方法で,

$$\xi_\alpha^*(s;-n)=\xi_\alpha(s+\alpha;1-n)-\xi_\alpha(s-\alpha;1-n)\quad (n\text{: 正整数})$$

たちの零点も全て $\Re(s)=1/2$ 上にあって単純であることが示される．先の $\xi_\alpha(s;-n)$ との比較のため, 最初の幾つかを挙げておく:

$$\begin{aligned}
2\,\xi_\alpha^*(s;-1) &= \xi(s+\alpha)-\xi(s-\alpha),\\
4\,\xi_\alpha^*(s;-2) &= \xi(s+2\alpha)-\xi(s-2\alpha),\\
8\,\xi_\alpha^*(s;-3) &= \xi(s+3\alpha)+3\,\xi(s+\alpha)-3\,\xi(s-\alpha)-\xi(s-3\alpha)\\
16\,\xi_\alpha^*(s;-4) &= \xi(s+4\alpha)+2\,\xi(s+2\alpha)-2\,\xi(s-2\alpha)-\xi(s-4\alpha)\ \text{etc.}
\end{aligned}$$

## 4. まとめ

ここまでで Riemann $\xi$-関数の変形族 $\{E_f\mid f\in\mathfrak{F}\}$ に含まれる 2 つの連続パラメータ族を扱ったが, Riemann 予想と密接に関係する部分族 $\{E_f\mid f\in\mathfrak{F}^\star\}$ や $\{E_f\mid f\in\mathfrak{F}^\star_{\rm st}\}$ をよく理解するには, まだまだ不十分な点が多い.

1 パラメータ族 $E_{f_\alpha}(s)=\xi(s)+\alpha\,\xi'(s)$ の利点は,

$$E_{f_\alpha}(s)=\xi(s)\left(1+\alpha\,\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\right)$$

という表示から, 対数微分 $(\xi'/\xi)(s)$ を通して数論的意味が捉えやすい事にあると思われる．ただ実際は, Riemann 予想を仮定した上で $E_{f_\alpha}$ が条件 (1.5) を満たすことが確かめられるにしても, その証明は $\xi(s)$ の Hadamrd 積表示によるものであって ([7]), $E_{f_\alpha}$ が条件 (1.5) を満たすことの数論的意味, 例えば Euler 積と条件 (1.5) との関係, がよく分ったという訳ではない．これは今後の課題の一つである.

一方, 2パラメータ族 $\xi_\alpha(s;r)$ の利点は, それが関数等式や decent formula, ascent formula 等のよい解析的性質を持つことである. そしてこれらの性質が $\xi_\alpha(s;r)$ を特徴付けている ([10]). 我々は集合 $\mathfrak{F}_{\mathrm{st}}^\star$ や埋め込み

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{st}}^\star \hookrightarrow \mathfrak{F}$$

の数論的性質や解析的性質が今回取り上げた 2 つの族とそれらの関係

$$E_{f_\alpha}(s) \sim E_\alpha(s) \quad (\alpha \to 0^+)$$

を通して, それぞれの利点を生かしながら解明されることを期待したい. もしかしたら, これは [10] にあるような, より大きな整関数の族を考えることで成されるのかもしれない.

## 5. 補遺：de Branges Hilbert 空間による零点の固有値解釈

この小論でしばしば取り上げられてきた条件 (1.5) は, 実は de Branges Hilbert 空間の理論に由来するものである. この理論を経由すると $\xi(s)$ や $\xi_\alpha(s;r)$ の零点に対して自然な固有値解釈が得られる. 最後にこの点について少し補足しておきたい.

De Branges Hilbert 空間の理論の大要は de Branges 自身による著作 [3] にまとめられているが, 証明が練習問題になっていたりして詳細が追い辛い部分も多い. 細部をフォローするには de Branges のこれに関する一連の論文を当たるか, 後に書かれた Dym [4], Kaltenbäck–Woracek [5], Remling [8], Lagarias [7] などを参考にするとよい.

条件 (1.5) を満たす整関数 $E(s)$ が与えられたとき, de Branges Hilbert 空間と呼ばれる整関数から成る Hilbert 空間 $\mathfrak{B}(E)$ が定まる. これは $F/E$ と $F^\vee/E$ が右半平面 $\Re(s) > 1/2$ の Hardy 空間に属し,

$$\|F\|^2 := \int_{\infty}^{\infty} \left| \frac{F(1/2+it)}{E(1/2+it)} \right|^2 dt < \infty$$

を満たすような整関数 $F$ 全体から成り, 内積が

$$\langle F, G \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(1/2+it)\,\overline{G(1/2+it)}}{|E(1/2+it)|^2}\, dt$$

で与えられるような Hilbert 空間である. 条件 (1.5) を満たす整関数 $E$ は $\mathfrak{B}(E)$ の構造関数 (structure function) と呼ばれる.

いま $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ を de Branges Hilbert 空間 $\mathfrak{B}(E)$ 上の $F(s) \mapsto i(1/2-s)F(s)$ で定義される掛算作用素とする. ここで定義域は $\mathcal{D} = \{F \in \mathcal{H}(E) \mid i(1/2-s)F(s) \in \mathcal{H}(E)\}$. 簡単のため, 定義域 $\mathcal{D}$ は $\mathfrak{B}(E)$ で稠密であることを仮定しておく. このとき $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ は閉対称作用素であり, $U(1) \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ でパラメトライズされる自己共役拡張の族をもつ. そして各々の $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ の自己共役拡張のスペクトルは離散スペクトル (固有値) のみからなり, 各固有空間は 1 次元である. このような自己共役拡張の中で, 我々にとって重要なのは関数

$$A(s) = \frac{1}{2}\Big(E(s) + E^\vee(s)\Big)$$

によって指定される自己共役拡張 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{D}_A)$ である. この自己共役拡張の固有値全体は $A(s)$ の零点 $\rho$ の虚部全体に一致し, その固有関数は

$$F_\rho(s) := \frac{A(s)}{s-\rho} \in \mathfrak{B}(E),$$

で与えられる.

Theorem 2.7 によれば, $E_{f_\alpha}(s) = \xi(s) + \alpha\xi'(s)$ は Riemann 予想と零点の単純性の仮定すれば, ある de Branges Hilbert 空間の構造関数となる. また, Theorem 3.3 によれば, $E_{\alpha,r}(s) = \xi_\alpha(s+\alpha; r+1)$ も, $\xi_\alpha(s;r) \neq 0$ for $\Re(s) \geqslant 1/2+\alpha$ ならば (例えば $r$ が負整数で $\alpha \geqslant 1$ のとき), ある de Branges Hilbert 空間の構造関数になる. これらの場合に掛算作用素の定義域 $\mathcal{D}$ が $\mathfrak{B}(E)$ ($E = E_{f_\alpha}$ or $E_{\alpha,r}$) で稠密になることを示すのは難しくない (例えば Baranov [1] を用いると手っ取り早い). そして $A(s)$ にあたるものがそれぞれ $\xi(s)$, $\xi_\alpha(s;r)$ となることから, これらの零点 (の虚部) は掛算作用素 (の自己共役拡張) の固有値として実現される.

このようにして Riemann ゼータ関数の非自明零点の固有値解釈が, de Branges Hilbert 空間の理論により可能になる訳だが, 通常, ゼータ関数/$L$ 関数の零点を固有値として解釈しようとする試みでは, 作用素はある種の微分作用素と想定されることが多い. 上では零点を固有値として実現するのに de Branges Hilbert 空間上の掛算作用素を用いたが, 実はこれを微分作用素の言葉に書き換えることが可能である. $L^2(\mathbb{R})$ 上の掛算作用素は Fourier 変換により微分作用素に変わることを思い出してもらいたい. これと同様に, de Branges Hilbert 空間にはある対になる $L^2$ 空間があって, これらはある一般化された "Fourier 変換" により互いにうつり合い, de Branges Hilbert 空間上の掛算作用素はその "Fourier 変換" によって微分作用素に変わる. この微分作用素は de Branges Hilbert 空間の部分空間の構造と密接に関わっており, de Branges Hilbert 空間自体を特徴付ける非常に重要な作用素なのだが, 今回はそこまで深入りせずにここで稿を終えることにする. 興味のある方はこの節の最初にあげた文献を参照して頂きたい.

## References


1. Anton Baranov, *Isometric embeddings of the spaces $K_\Theta$ in the upper half-plane*, J. Math. Sci. (New York) **105** (2001), no. 5, 2319–2329, Function theory and partial differential equations. MR MR1855436 (2002h:46039)
2. Louis de Branges, *Some Hilbert spaces of entire functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 840–846. MR MR0114002 (22 #4833)
3. ———, *Hilbert spaces of entire functions*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968. MR MR0229011 (37 #4590)
4. Harry Dym, *An introduction to de Branges spaces of entire functions with applications to differential equations of the Sturm-Liouville type*, Advances in Math. **5** (1970), 395–471. MR MR0276741 (43 #2481)
5. Michael Kaltenbäck and Harald Woracek, *Pontryagin spaces of entire functions. I*, Integral Equations Operator Theory **33** (1999), no. 1, 34–97. MR MR1664343 (2000a:46039)
6. Jeffrey C. Lagarias, *Zero spacing distributions for differenced L-functions*, Acta Arith. **120** (2005), no. 2, 159–184. MR MR2187786 (2007c:11097)
7. ———, *Hilbert spaces of entire functions and Dirichlet L-functions*, Frontiers in number theory, physics, and geometry. I, Springer, Berlin, 2006, pp. 365–377. MR MR2261101 (2007g:11105)
8. Christian Remling, *Schrödinger operators and de Branges spaces*, J. Funct. Anal. **196** (2002), no. 2, 323–394. MR MR1943095 (2003j:47055)
9. Masatoshi Suzuki, *Deformations of the Riemann xi-function*, prepublication, January 2009.
10. ———, *Deformations of the Riemann xi-function. II*, prepublication, January 2009.



Graduate School of Mathematical Sciences
The University of Tokyo
Komaba 3-8-1, Meguro-ku,
Tokyo 153-8914, Japan
Email: `msuzuki@ms.u-tokyo.ac.jp`