On the Riemann Hypothesis for Weng's non-abelian zeta of rank 2

鈴木正俊,
(Jeffrey C. Lagarias 氏との共同研究)

1. 導入

近年 Lin Weng 氏により定義されたゼータ関数がある特殊な場合にはリーマン予想の類似を満たすという事について述べる. 今回扱うゼータ関数は合同ゼータ関数の一つの一般化として定義されるので, まず合同ゼータ関数の復習から始めよう.

2. 有限体上の代数曲線のゼータ関数

C を有限体 $\mathbf{F}_q$ 上定義された非特異, 射影的代数曲線とし, C_0 を C の閉点全体, $K = \mathbf{F}_q(C)$ を C の関数体, $\mathcal{O}_C$ を C の構造層とする. $\Gamma(C, \mathcal{O}_C) = \mathbf{F}_q$ を仮定しておく.

2.1. **因子, 直線束.**

C_0 を底とする自由 abel 群

$$\mathrm{Div}(C) := \oplus_{P \in C_0} \mathbf{Z}[P]$$

の元 $D = \sum_P n_P[P]$, $n_P \in \mathbf{Z}$, を C 上の因子という. $D \geq 0$ とは, $n_P \geq 0$, $\forall P$ を意味する. $D \geq 0$ である因子は effective であると言われる. 因子 D の次数を

$$\deg(D) := \sum_P n_P[\kappa(P) : \mathbf{F}_q]$$

により定義する. ここで $\kappa(P) := \mathcal{O}_{C,P}/m_P =$($P$ における剰余体). $f \in K^\times$ に対する主因子は

$$(f) := \sum_P \mathrm{ord}_P(f)[P]$$

と定義される. 主因子を法として等しい因子 D_1, D_2 を線形同値 ($D_1 \sim D_2$) と言う. 準同型 $K^\times \ni f \mapsto (f) \in \mathrm{Div}(C)$ の余核を C の因子類群と言い, $\mathrm{Cl}(C)$ と書く. ($C = \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_q}$ のとき直接, 一般の C に対しては有限次元被覆 $C \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_q}$ を用いて) $\deg((f)) = 0$ が分るので deg は因子類群を経由する：$\deg : \mathrm{Cl}(C) \to \mathbf{Z}$.

C 上の直線束は, C 上の階数 1 の局所自由層 (可逆層) と同じである. 因子 D に対し, C の開被覆 $C = \cup_i U_i$ がとれて $D|_{U_i} = (s_i)$ ($\exists s_i \in \mathbf{F}_q(U_i)$) と書けるので, 可逆層 $\mathcal{O}_D$ が $\mathcal{O}_D|_{U_i} = \mathcal{O}_{\mathcal{C}} s_i^{-1}$ により定まる. $s_j/s_i \in H^0(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_C^\times)$ が直線束の張り合わせの関数である. 逆に, 可逆層 L から上の逆をたどり因子 $D = D_L$ が得られ, 同型な直線束には線形同値な因子が対応する事が分る. これから因子類群 $\mathrm{Cl}(C)$ は, 直線束の同型類のなす群 $\mathrm{Pic}(C) = H^1(C, \mathcal{O}_C^\times)$ と同一視される：

$$\mathrm{Cl}(C) = \mathrm{Pic}(C) = H^1(C, \mathcal{O}_C^\times).$$

次数 0 の因子類の全体

$$\mathrm{Cl}_0(C) := \ker(\deg : \mathrm{Div}(C) \to \mathbf{Z})$$

は有限 abel 群となる事が知られている. 微分 K-加群 $\Omega_{K/\mathbf{F}_q}$ は 1 次元空間で, その底 ω に伴う因子 W が標準層 Ω_C に対応する. $g := \dim_{\mathbf{F}_q} H^0(C, \Omega_C)$ を C の種数という.

2.2. **zeta 関数.**

有限体 $\mathbf{F}_q$ 上の非特異, 射影的代数曲線 C のゼータ関数は

$$\zeta_C(s) := \sum_{D \geq 0} q^{-s\deg(D)}, \qquad (s \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}(s) > 1), \tag{2.1}$$

により定義される. 因子 D に対し

$$h^0(D) := \dim_{\mathbf{F}_q} H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \tag{2.2}$$

とすれば[1]

$$\sharp\{D' \geq 0 \,|\, D' \sim D\} = \frac{q^{h^0(D)} - 1}{q - 1}. \tag{2.3}$$

$\deg(D)$, $h^0(D)$ は線形同値で不変なので因子類 $[D]$ に対し, $\deg([D]) := \deg(D)$, $h^0([D]) := h^0(D)$ とすれば

$$\zeta_C(s) = \sum_{[D] \in \mathrm{Pic}(C)} \frac{q^{h^0([D])} - 1}{q - 1}\, q^{-s\deg([D])}. \tag{2.4}$$

Riemann-Roch の定理により $\zeta_C(s)$ の関数等式が導かれるが, ここではそれに触れない. また $\zeta_C(s)$ の他の性質についても省略する.

$\mathrm{Pic}(C)$ は C 上の直線束の同型類全体であった. 大雑把に言って (2.4) において $\mathrm{Pic}(C)$ を C 上の階数 r のベクトル束の同型類全体で置き換えたものが有限体上の代数曲線に対する翁氏の zeta 関数である[2]. 但し C 上の階数 r のベクトル束の同型類全体を考えたのでは上手くゆかぬ部分がある. この問題点は Mumford により導入されたベクトル束の安定性の概念を用いて, 和を半安定なベクトル束の同型類たちに制限する事により解決され, 解析接続や関数等式等のよい解析的が導かれる.

3. 代数体のゼータ関数

K を n 次の有限次代数体, $\mathcal{O}_K$ を K の整数環, μ_K を K 内の 1 の冪根のなす群, $w_F := \sharp\mu_F$ とする. $X := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$, X_0 を X の閉点 (=極大イデアル) 全体, $X_\infty := \{\sigma : F \hookrightarrow \mathbf{C}\}/$(複素共役) とする. $\sigma \in X_\infty$ は, $\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{R}$ のとき実素点, $\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}$ のとき複素素点, と呼ばれ, 各々の場合に従って, $K_\sigma :=$ R ないし $\mathbf{C}$, $\varepsilon_\sigma = 1$ ないし $= 2$ とおく. 実素点が r_1 個, 複素素点 (mod 複素共役) が r_2 個あるとする:$n = r_1 + 2r_2$. $\overline{X} := X \cup X_\infty$ を“ compact 化された数論的曲線 ”と見る.

---

[1] $H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) = H^0(D) := \{f \in \mathbf{F}_q(C)^\times \,|\, D + (f) \geq 0\} \cup \{0\}$

[2] E:ベクトル束, $h^0(E) := \dim H^0(C, E)$, $\deg(E) := \deg(\det E)$

3.1. **Arakelov 因子, metrized 直線束.**
位相 abel 群

$$\mathrm{Div}(\overline{X}) := \bigoplus_{P\in X_0} \mathbf{Z}[P] \oplus \bigoplus_{\sigma\in X_\infty} \mathbf{R}[\sigma]$$

を $\overline{X}$ 上の Arakelov 因子群と言い, その元を $\overline{X}$ 上の Arakelov 因子という. ここで $\mathrm{Div}(\overline{X})$ の位相は, $\mathbf{Z}$ は離散, $\mathbf{R}$ は Euclid 空間とみなして直積位相から誘導されるものとする. Arakelov 因子 $D = \sum_{P\in X_0} n_p[P] + \sum_{\sigma\in X_\infty} r_\sigma[\sigma]$ の次数を

$$\deg(D) := \sum_{P\in X_0} n_p\sharp(\mathcal{O}_K/P) + \sum_{\sigma\in X_\infty} r_\sigma \tag{3.1}$$

で定義する. “ 関数 ”$f\in K^\times$ に対し, その主因子を

$$(f) := \sum_{P\in X_0} \mathrm{ord}_P(f)[P] - \sum_{\sigma\in X_\infty} \varepsilon_\sigma r_\sigma \log|\sigma(f)|[\sigma] \tag{3.2}$$

と定義する. 但し $f\mathcal{O}_K = \prod_P P^{\mathrm{ord}_P(f)}$ と極大イデアル分解されているものとする. 準同型 $K^\times \ni f \mapsto (f)\in \mathrm{Div}(\overline{X})$ の余核を $\overline{X}$ の Arakelov 因子類群と言い, $\mathrm{Cl}(\overline{X})$ と書く. これは局所 compact abel 群である:

$$0 \longrightarrow \mu_K \longrightarrow K^\times \longrightarrow \mathrm{Div}(\overline{X}) \longrightarrow \mathrm{Cl}(\overline{X}) \longrightarrow 0 \quad (\text{exact}).$$

積公式により $\deg((f)) = 0$ なので, deg は連続準同型 $\det : \mathrm{Div}(\overline{X}) \to \mathbf{R}$ を定める.

X 上の可逆層, 即ち, 射影的 $\mathcal{O}_K$-加群 ($=K$ の分数イデアル) L と各 $\sigma\in X_\infty$ に対する $L_\sigma := L\otimes_K K_\sigma$ 上の Hermite 計量 $|\cdot|_\sigma$ の組 $\overline{L} = (L, (|\cdot|_\sigma)_{\sigma\in X_\infty})$ を $\overline{X}$ 上の metrized 直線束という. $\overline{L}$ と $\overline{L}' = (L', (|\cdot|'_\sigma))$ が同型とは, $\mathcal{O}_K$-加群の同型 $\psi : L\to L'$ が存在し, 各 $\sigma\in X_\infty$ に対し isometry $\psi_\sigma : L_\sigma \to L'_\sigma$ を導く事とする. metrized 直線束の同型類の集合を $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ と書く. $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ は

$$[\overline{L}]\cdot[\overline{L}'] := [(L\otimes_{\mathcal{O}_K} L', (|\cdot|_\sigma\cdot|\cdot|'_\sigma))]$$

と積を定める事により abel 群をなす.

Arakelov 因子 $D = \sum_{P\in X_0} n_p[P] + \sum_{\sigma\in X_\infty} r_\sigma[\sigma]$ に対し, metrized 直線束

$$\mathcal{O}_{\overline{X}}(D) := (\mathcal{O}_X(D_{\mathrm{f}}), (|\cdot|_\sigma)_{\sigma\in X_\infty}) \tag{3.3}$$

が

$$\mathcal{O}_X(D_{\mathrm{f}}) : = \prod_P P^{-n_P}, \tag{3.4}$$

$$|1|_\sigma : = \exp(-r_\sigma/\varepsilon_\sigma), \tag{3.5}$$

により定まる. 逆に, metrized 直線束に対し Arakelov 因子がこの逆をたどって定まり, 同型

$$\mathrm{Cl}(\overline{X}) \simeq \mathrm{Pic}(\overline{X}) \tag{3.6}$$

を与える. D と $\overline{L}$ の類が対応するとき,

$$\deg(D) = \deg(\overline{L}) := \log\sharp(L/s\mathcal{O}_K) - \sum_{\sigma\in X_\infty} \varepsilon_\sigma \log|s|_\sigma \quad (s\in L\ :\ \text{section}) \tag{3.7}$$

が成り立つ (s のとり方によらない).

微分 $\mathcal{O}_K$-加群 $\Omega_{\mathcal{O}_K/\mathbf{Z}}$ は $\mathcal{O}_K$ 上 1 元 ω で生成され, その annihilator は $K/\mathbf{Q}$ の共役差積 $\mathcal{D}\prod_P P^{d_P}$: $\Omega_{\mathcal{O}_K/\mathbf{Z}} = \mathcal{O}_K\omega \simeq \mathcal{O}_K/\mathcal{D}$. (ω) に付随する自明な計量をもった metrized 直線束を $\overline{X}$ 上の余接束 $\Omega_{\overline{X}}$ とし, 対応する Arakelov 因子 $W = \sum_P d_P[P] + \sum_\sigma 0[\sigma]$ を微分因子と定める.

代数曲線の場合の $h^0(D) = \dim H^0(D)$ に対応する量として次を導入する. metrized 直線束 $\overline{L} = (L, (|\cdot|_\sigma))$ と $s \in L$ に対し

$$|s|^2_{\overline{L}} := \sum_{\sigma\in X_\infty} \varepsilon_\sigma |s|^2_\sigma = \sum_{\sigma\in X_\infty} \varepsilon_\sigma e^{-2r_\sigma/\varepsilon_\sigma} |\sigma(s)|^2, \tag{3.8}$$

$$h^0(\overline{L}) := \log\left(\sum_{s\in L} \exp(-\pi |s|^2_{\overline{L}})\right) \tag{3.9}$$

と定義する. ここで $h^0(\overline{L})$ は $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ 上の関数であることに注意する. 対応する Arakelov 因子 D に対しても $|s|_D$, $h^0(D)$ などの記号を用いる.

3.2. zeta 関数.

Arakelov 因子を用いて代数体 K の完備 zeta 関数を有限体上の代数曲線の zeta 関数に類似した形で表示する事ができる. Arakelov 因子 $D = \sum_{P\in X_0} n_P[P] + \sum_{\sigma\in X_\infty} r_\sigma[\sigma]$ に対し, $D \geq 0$ で $n_P \geq 0$, $\forall P$ を意味するものとする. $d\mu(D)$ を位相群 $\mathrm{Div}(\overline{X})$ 上の Haar 測度とし[3]

$$d\mu_{\mathrm{eff}}(D) := \exp(-\pi |1|^2_D) d\mu(D) \tag{3.10}$$

とする. このとき

$$\zeta_{\overline{X}}(s) := \int_{D\in\mathrm{Div}(\overline{X}),\, D\geq 0} e^{-s\deg(D)} d\mu_{\mathrm{eff}}(D) \tag{3.11}$$

と定義する. $t_\sigma = e^{-r_\sigma}$ とおく事により

$$\begin{aligned}
\zeta_{\overline{X}}(s) &= \sum_{0\neq I\subset\mathcal{O}_K} N(I)^{-s} \int_0^\infty (\prod_\sigma t_\sigma^s) \exp\left(-\pi \sum_{\sigma:\mathrm{real}} t_\sigma^2 - 2\pi \sum_{\sigma:\mathrm{cpx}} t_\sigma\right) \prod_\sigma \frac{dt_\sigma}{t_\sigma} \\
&= (2\pi^{-s/2}\Gamma(s/2))^{r_1} ((2\pi)^{-s}\Gamma(s))^{r_2} \sum_{0\neq I\subset\mathcal{O}_K} N(I)^{-s} \\
&= 2^{r_1} \widehat{\zeta}_K(s)
\end{aligned}$$

を得る. ここで $\widehat{\zeta}_K(s)$ は通常の完備 Dedekind zeta 関数. $\zeta_{\overline{X}}(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束し, 代数曲線の時と同様に

$$\zeta_{\overline{X}}(s) = w_K^{-1} \int_{[\overline{L}]\in\mathrm{Pic}(\overline{X})} (e^{h^0([\overline{L}])} - 1)\, e^{-s\deg([\overline{L}])} d([\overline{L}]) \tag{3.12}$$

という表示が成立つ事が分る.

[3] $\mathbf{Z}[P]$ 上には counting 測度 $d\mu_P$, $\mathbf{R}[\sigma]$ 上には Lebesgue 測度 $d\mu_\sigma$ を入れ $d\mu := \prod_P d\mu_P \times \prod_\sigma d\mu_\sigma$ と定める.

4. 翁氏のゼータ関数 (ベクトル束のゼータ関数)：代数体の場合

今回対象となる zeta 関数は, 前節の Arakelov 因子を用いた代数体のゼータ関数の表示を手がかりに近年翁氏が定義したものである. その定義をするには些か準備する. 簡単のため $\mathbf{Q}$ 上で話をすることにしよう.

4.1. metrized 加群（Arakelov ベクトル束）.

階数 r の torsion free $\mathbf{Z}$-加群 $\Lambda \subset \mathbf{Q}^r$ と $\mathbf{R}^r = \Lambda \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$ 上の Hermite 計量 $|\cdot|_\infty$ の組 $\overline{\Lambda} = (\Lambda, |\cdot|_\infty)$ を（$\overline{\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}}$ 上の）metrized 加群（又は Arakelov ベクトル束）という. 各 $\rho \in GL_r(\mathbf{R})$ から $\mathbf{R}^r$ 上の距離 $|\cdot|_\rho$ が $|x|_\rho := |\rho^{-1}x|$ により定まる（ここで $|\cdot|$ は $\mathbf{R}^r$ 上のユークリッド距離). 逆に $\mathbf{R}^r$ 上の Hermite 計量は全てこのようにして得られる.

階数 r の metrized 加群 $\overline{\Lambda}_1 = (\Lambda_1, |\cdot|_{\rho_1})$ と $\overline{\Lambda}_2 = (\Lambda_2, |\cdot|_{\rho_2})$ が同型とは $\mathbf{Z}$-加群の同型 $\psi : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ が存在して isometry $\psi_\infty : (\mathbf{R}^r, |\cdot|_{\rho_1}) \to (\mathbf{R}^r, |\cdot|_{\rho_2})$ を導く事をいう. これは ψ を $GL_r(\mathbf{R})$ の元と見たとき

$$\rho_1 \psi \rho_2^{-1} \in SO_r(\mathbf{R})$$

と同値である. 階数 r の metrized 加群の同型類全体を $\mathcal{M}_{\mathbf{Q},r}$ で表す. また $\overline{\Lambda}$ が属す同型類を $[\overline{\Lambda}]$ と書く.

$\overline{\Lambda} = (\Lambda, |\cdot|_\rho)$ を階数 r の metrized 加群とする. $\mathbf{Z}$-部分加群 $\Lambda' \subset \Lambda$ に対し, 通常の Lebesgue 測度による $\rho^{-1}(\Lambda') \subset \mathbf{R}^r$ の基本領域の体積を $\mathrm{vol}_\rho(\Lambda')$ で表す. このとき $\overline{\Lambda}$ が半安定とは, 任意の $\mathbf{Z}$-部分加群 $\Lambda' \subset \Lambda$ に対し

$$\mathrm{vol}_\rho(\Lambda)^{\mathrm{rank}(\Lambda')} \leq \mathrm{vol}_\rho(\Lambda')^{\mathrm{rank}(\Lambda)}$$

である事をいう. 半安定性は同型で保たれる事が確かめられるので, metrized 加群の同型類 $[\overline{\Lambda}]$ が半安定とは一つの代表 $\overline{\Lambda}$ が半安定である事と定義する. 半安定な階数 r の metrized 加群の同型類全体を $\mathcal{M}^0_{\mathbf{Q},r}$ で表す.

些か天下りではあるが, metrized 加群 $\overline{\Lambda} = (\Lambda, |\cdot|_\rho)$ に対し $\deg(\overline{\Lambda})$, $h^0(\overline{\Lambda})$ を

$$\deg(\overline{\Lambda}) := -\log(\mathrm{vol}_\rho(\Lambda)) \tag{4.1}$$

$$h^0(\overline{\Lambda}) := \log\left(\sum_{s\in\Lambda} \exp(-\pi|s|_\rho^2)\right) = \log\left(\sum_{s\in\Lambda} \exp(-\pi|\rho^{-1}s|^2)\right) \tag{4.2}$$

と定義する. ここで $\deg(\overline{\Lambda})$, $h^0(\overline{\Lambda})$ は $\mathcal{M}_{\mathbf{Q},r}$ 上の関数であることに注意する.

4.2. zeta 関数.

前節の metrized 加群の同型類全体 $\mathcal{M}_r$ には標準的な位相と測度 $d\mu$（玉河測度）を導入することができる. これを用いて翁氏は次のように zeta 関数を定義した.

$$\xi_{\mathbf{Q},r}(s) := \int_{[\overline{\Lambda}]\in\mathcal{M}^0_{\mathbf{Q},r}} \left(e^{h^0([\overline{\Lambda}])} - 1\right) \cdot e^{-s\deg([\overline{\Lambda}])} d\mu([\overline{\Lambda}]), \quad \mathrm{Re}(s) > r. \tag{4.3}$$

ここで積分は半安定な metrized 加群の同型類上に制限している事に注意する. 同型類全体で積分をとってしまうと積分は収束しない. $r=1$ のとき $\xi_{\mathbf{Q},1}(s)$ は完備 Riemann ゼータ関数 $\widehat{\zeta}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ に一致する. また $\xi_{\mathbf{Q},r}(s)$ は全平面に有理型に解析接続され, 関数等式 $\xi_{\mathbf{Q},r}(s) = \xi_{\mathbf{Q},r}(1-s)$ をもち, $s = 0, 1$ を除いて正則である事が知られている [5].

$\xi_{\mathbf{Q},r}(s)$ の Riemann 予想を考える事は他のゼータ関数達と同様に興味深い問題であると思われる．今回 $\xi_{\mathbf{Q},2}(s)$ について次の結果を得る事ができた．

定理. $\xi_{\mathbf{Q},2}(s)$ の全ての零点は臨海線 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 上にある．

証明は次節に回す事として少し注意を述べておく．$\xi_{\mathbf{Q},2}(s)$ が Riemann 予想を満たすという事実は興味深いと思われるが，これが数論的にいかなる意味を持っているかはいささか不明瞭である．一般に $r \geq 2$ のときは $\xi_{\mathbf{Q},r}(s)$ は関数等式は持つが Euler 積は持たない．実際に $r = 2$ の場合に $\xi_{\mathbf{Q},2}(s)$ の具体的表示から Euler 積を持たない事が分る．また $\xi_{\mathbf{Q},2}(s)$ のガンマ因子は $(\mathrm{const}) \times \pi^{-s}\Gamma(s)$ が適当であると予想されるが，$\pi^s\Gamma(s)^{-1}\xi_{\mathbf{Q},2}(s)$ は通常の Dirichlet 級数としての表示は持たない．この２つの事実が $\xi_{\mathbf{Q},2}(s)$ の Riemann 予想の意味するところを直ちには分り難くしている．今でも $\xi_{\mathbf{Q},2}(s)$ の Riemann 予想の数論的意味は分らないままである．これは今後の研究の重要な課題の一つである．

5. 定理の証明

まず $\xi_{\mathbf{Q},2}(s)$ を既知の関数で表示する．先に結果を言ってしまえば $\xi_{\mathbf{Q},2}(s)$ は Eisenstein 級数を $SL_2(\mathbf{Z})$ の基本領域のある部分集合の上で積分したものとなり，その結果２つの Riemann ゼータ関数で表示される．この表示に着目してある補題を適用する事により定理が証明される．

5.1. $\xi_{\mathbf{Q},2}(s)$ **の計算.**

この節の目標は次を示す事である．

命題. $r = 2$ のとき，$\xi_{\mathbf{Q},2}(s)$ は次の表示をもつ．

$$\xi_{\mathbf{Q},2}(s) = \frac{\xi(2s) - \xi(2s-1)}{2s(2s-1)(1-s)}.$$

ここで $\xi(s) = s(1-s)\widehat{\zeta}(s)$.

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$ を $\mathbf{Q}$ のアデール環とする．$x \in \mathbf{A}^\times$ に対し Arakelov 因子 $\mathrm{div}(x) := \sum_p \mathrm{ord}_p(x_p) \cdot [p] - \log|x_\infty| \cdot [\infty]$ を対応させる事により，郡同型

$$GL_1(\mathbf{Q}) \backslash GL_1(\mathbf{A}) / \{\pm 1\} \times \widehat{\mathbf{Z}}^\times \quad \simeq \quad \mathrm{Cl}(\overline{\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}}) \tag{5.1}$$

が得られる．また Arakelov 因子 $D = \sum_{p:\,\mathrm{prime}} n_p[p] + r_\infty[\infty]$ に対し，metrized 直線束

$$\mathcal{O}_{\overline{\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}}}(D) = \left((\prod_p p^{-n_p})\mathbf{Z}\,,\; e^{-r_\infty}\,|\cdot| \right) \tag{5.2}$$

を対応させることにより

$$\mathrm{Cl}(\overline{\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}}) \simeq \mathrm{Pic}(\overline{\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}})$$

であったから，この二つの同型を繋いで

$$GL_1(\mathbf{Q}) \backslash GL_1(\mathbf{A}) / \{\pm 1\} \times \widehat{\mathbf{Z}}^\times \quad \simeq \quad \mathrm{Pic}(\overline{\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}}) \tag{5.3}$$

が得られる．この様にして $\overline{\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}}$ 上の metrized 直線束の同型類の成す位相群は局所 compact 位相群 $GL_1(\mathbf{A})$ の商と同一視される．我々は階数 2 の metrized 加群の同型類の成す位相空間 $\mathcal{M}_{\mathbf{Q},2}$ を $GL_2(\mathbf{A})$ の商空間と同一視する事により命題を証明する．

[**命題の証明のアウトライン**]

$g = (g_\nu)_\nu \in GL_2(\mathbf{A})$ に対し $\mathbf{Z}$-加群 Λ_g を

$$\Lambda_g := \{\alpha \in \mathbf{Q}^2 \,|\, g_p^{-1}\alpha \in \mathbf{Z}_p^2, \quad \forall p\}$$

で定め, $|\cdot|_{g_\infty}$ を $g_\infty \in GL_2(\mathbf{R})$ から定まる $\mathbf{R}^2$ 上の Hermite 計量とすると metrized 加群 $\overline{\Lambda}_g = (\Lambda_g, |\cdot|_{g_\infty})$ が得られる．g_1, $g_2 \in GL_2(\mathbf{A})$ に対し $g_2 = \gamma g_1$, $\gamma \in GL_2(\mathbf{Q})$ であるとき $\overline{\Lambda}_{g_1}$ と $\overline{\Lambda}_{g_2}$ は同型である事が分るので $g \mapsto \overline{\Lambda_g}$ により

$$GL_2(\mathbf{Q})\backslash GL_2(\mathbf{A}) \quad \to \quad \mathcal{M}_{\mathbf{Q},2}$$

が well-defined に定まる．これは全射ではあるが単射ではない．しかし Λ_g の作り方から $K_{\mathrm{f}} := \prod_p GL_2(\mathbf{Z}_p)$ とすると

$$M_{\mathbf{Q},2} := GL_2(\mathbf{Q})\backslash GL_2(\mathbf{A})/SO_2(\mathbf{R})\,K_{\mathrm{f}} \quad \to \quad \mathcal{M}_{\mathbf{Q},2}$$

は全単射となる．またこの対応により

$$\deg(\overline{\Lambda}_g) = \log(\,|\det(g)|_{\mathbf{A}}).$$

$M_{\mathbf{Q},2}$ の $\mathcal{M}^0_{\mathbf{Q},2}$ に対応する部分を $M^0_{\mathbf{Q},2}$ と書く． また $h^0(g) := h^0([\overline{\Lambda}_g])$, $\deg(g) := \log(N(\det(g)))$ とすると

$$\xi_{\mathbf{Q},2}(s) = \int_{M^0_{\mathbf{Q},2}} (e^{h^0(g)} - 1)e^{-s\deg(g)} d\mu(g) \tag{5.4}$$

$$= \int_{M^0_{\mathbf{Q},2}} \sum_{0\neq\alpha\in\Lambda_g} e^{-\pi|g_\infty^{-1}\alpha|^2} e^{s\,\log(\,|\det(g)|_{\mathbf{A}})} d\mu(g) \tag{5.5}$$

ここで $|\det(g)|_{\mathbf{A}} = t$ となる $M_{\mathbf{Q},2}$（resp.$M^0_{\mathbf{Q},2}$）の類全体を $M_{\mathbf{Q},2}(t)$（resp.$M^0_{\mathbf{Q},2}(\mathrm{t})$）と書けば $M^0_{\mathbf{Q},2}(t) = \sqrt{t}M^0_{\mathbf{Q},2}(1)$ であるから

$$\xi_{\mathbf{Q},2}(s) = \int_0^\infty \int_{M^0_{\mathbf{Q},2}(1)} \sum_{0\neq\alpha\in\Lambda_g} e^{-\pi t|g_\infty^{-1}\alpha|^2} d\mu(g)\, t^s \frac{dt}{t} \tag{5.6}$$

ここで近似定理

$$GL_2(\mathbf{Q})\backslash GL_2(\mathbf{A})/K_{\mathrm{f}} \simeq SL_2(\mathbf{Z})\backslash GL_2(\mathbf{R})^+$$
$$Z(\mathbf{A})\,GL_2(\mathbf{Q})\backslash GL_2(\mathbf{A})/K_{\mathrm{f}} \simeq Z(\mathbf{R})^+ SL_2(\mathbf{Z})\backslash GL_2(\mathbf{R})^+ \simeq SL_2(\mathbf{Z})\backslash SL_2(\mathbf{R})$$

を用いると $M_{\mathbf{Q},2}(1)$ は $SL_2(\mathbf{Z})\backslash SL_2(\mathbf{R})/SO_2(\mathbf{R})$ と同一視する事ができ, $M^0_{\mathbf{Q},2}(1)$ は $SL_2(\mathbf{Z})$ の基本領域

$$D := \{z \in \mathfrak{h} \,|\, |z| \geq 1,\, -1/2 \leq x \leq 1/2,\, \}$$

内の部分集合

$$D_1 := \{z \in D \,|\, \mathrm{Im}(z) \leq 1\}$$

と同一視できる. このときの metrized 加群の対応は

$$(\mathbf{Z}^2, |\cdot|_{\begin{pmatrix} y^{-1/2} & xy^{-1/2} \\ & y^{1/2} \end{pmatrix}^{-1}}) \quad \Longleftrightarrow \quad \tau = x + iy \in \mathfrak{h}$$

となっている. 従って

$$\xi_{\mathbf{Q},2}(s) = \int_0^\infty \int_{D_1} \frac{1}{2} \sum_{(0,0)\neq(m,n)\in\mathbf{Z}^2} e^{-\pi t \frac{|m+n\tau|^2}{\mathrm{Im}(\tau)}} d\mu(\tau)\, t^s \frac{dt}{t} \tag{5.7}$$

$$= \int_{D_1} \frac{1}{2} \sum_{(0,0)\neq(m,n)\in\mathbf{Z}^2} \int_0^\infty e^{-\pi t \frac{|m+n\tau|^2}{\mathrm{Im}(\tau)}} t^s \frac{dt}{t} d\mu(\tau) \tag{5.8}$$

$$= \pi^{-s}\Gamma(s) \int_{D_1} \frac{1}{2} \sum_{(0,0)\neq(m,n)\in\mathbf{Z}^2} \frac{\mathrm{Im}(\tau)^s}{|m+n\tau|^{2s}} d\mu(\tau). \tag{5.9}$$

ここで Eisenstein 級数の定義

$$\widehat{E}(\tau, s) = \pi^{-s}\Gamma(s)\frac{1}{2} \sum_{(0,0)\neq(m,n)\in\mathbf{Z}^2} \frac{\mathrm{Im}(\tau)^s}{|m+n\tau|^{2s}}$$

を思い出すと

$$\xi_{\mathbf{Q},2}(s) = \int_{D_1} \widehat{E}(\tau, s) d\mu(\tau). \tag{5.10}$$

$\Delta\widehat{E}(\tau, s) = s(1-s)\widehat{E}(\tau, s)$ なので Green の定理を適用すれば

$$s(1-s)\int_{D_1} \widehat{E}(\tau, s) d\mu(\tau) = \int_{\partial D_1} \frac{\partial}{\partial n}\widehat{E}(\tau, s) ds.$$

$\widehat{E}(\gamma\tau, s) = \widehat{E}(\tau, s)$, $\forall\gamma \in SL_2(\mathbf{Z})$ から ∂D_1 上の積分は $y = 1$ 上以外では打ち消し合う. $y = 1$ 上の積分は Eisenstein 級数の Fourier 展開

$$\widehat{E}(\tau, s) = \widehat{\zeta}(2s)y^s + \widehat{\zeta}(2s-1)y^{1-s} + \cdots$$

を用いて計算する事ができ,

$$s(1-s)\int_{D_1} \widehat{E}(\tau, s) d\mu(\tau) = -s\widehat{\zeta}(2s) + (1-s)\widehat{\zeta}(2s-1).$$

これを整理すれば求める $\xi_{\mathbf{Q},2}(s)$ の表示が得られる. □

5.2. **鍵となる補題.**

補題. c を正定数, $F(z)$ を種数 0 又は 1 の整関数で実軸上で実数値とり, 少なくとも一つの零点をもつものとする. 更に次を仮定する:

(i) $F(z)$ は関数等式 $F(z) = \omega F(-z)$ をもつ. ここで $|\omega| = 1$.
(ii) $|\mathrm{Im}(z)| \geq c$ 内で $F(z) \neq 0$.

このとき $F(z+ic) \pm F(z-ic)$ の全ての零点は実軸上にある.

補題の証明. まず $F(z)$ が実軸上実数値をとる事から $F(z)=\overline{F(\bar{z})}$ であることに注意する. 定理の仮定から $F(z)$ は次の積表示をもつ.

$$
\begin{aligned}
F(z) =& C z^q e^{\alpha z} \prod_{\rho} \left(1-\frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho} \\
=& C z^q e^{\alpha z} \prod_{\rho:\,\mathrm{real}} \left(1-\frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho} \\
&\times \prod_{\mathrm{Im}(\rho)>0,\,\mathrm{Re}(\rho)\geq 0} \left(1-\frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho} \left(1+\frac{z}{\rho}\right) e^{-z/\rho} \left(1-\frac{z}{\bar{\rho}}\right) e^{z/\bar{\rho}} \left(1+\frac{z}{\bar{\rho}}\right) e^{-z/\bar{\rho}}
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

ここで C と α は実定数, q は非負整数で, $\sum |\rho|^{-2}$ は絶対収束する. 無限積の絶対収束性から次の様に積を分ける:

$$
\begin{aligned}
F(z) &= C z^q e^{\alpha z} \prod_{\rho:\,\mathrm{real}} \left(1-\frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho} \quad \times \prod_{\mathrm{Im}(\rho)>0,\,\mathrm{Re}(\rho)\geq 0} \left(1-\frac{z^2}{\rho^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{\bar{\rho}^2}\right) \\
&=: F_1(z) F_2(z).
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

いま $z_0 = x_0 + i y_0$ を $F(z+ic) \pm F(z-ic)$ の零点とすると

$$
|F(z_0+ic)| = |F(z_0-ic)|.
$$

従って

$$
1 = \left|\frac{F_1(z_0+ic)}{F_1(z_0-ic)}\right|^2 \left|\frac{F_2(z_0+ic)}{F_2(z_0-ic)}\right|^2 . \tag{5.13}
$$

F_1 について,

$$
\left|\frac{F_1(z_0+ic)}{F_1(z_0-ic)}\right|^2 = \left\{\frac{x_0^2+(y_0+c)^2}{x_0^2+(y_0-c)^2}\right\}^q \prod_{\rho:\,\mathrm{real}} \frac{(x_0-\rho)^2+(y_0+c)^2}{(x_0-\rho)+(y_0-c)^2}.
$$

であるから, もし $y_0>0$ なら右辺の各因子は >1, また, もし $y_0<0$ なら右辺の各因子は <1. 故に

$$
\left|\frac{F_1(z_0+ic)}{F_1(z_0-ic)}\right| = \begin{cases} >1 & \text{if } y_0>0, \\ <1 & \text{if } y_0<0. \end{cases} \tag{5.14}
$$

F_2 について,

$$\left|\frac{F_2(z_0+ic)}{F_2(z_0-ic)}\right|^2 = \prod_{\substack{\rho=\alpha+\sqrt{-1}\beta \\ \alpha\geq 1,\,\beta>0}} \left\{ \frac{(x_0-\alpha)^2+(\beta-c)^2+y_0^2+2y_0(c-\beta)}{(x_0-\alpha)^2+(\beta-c)^2+y_0^2-2y_0(c-\beta)} \right.$$
$$\times \frac{(x_0+\alpha)^2+(\beta-c)^2+y_0^2+2y_0(c-\beta)}{(x_0+\alpha)^2+(\beta-c)^2+y_0^2-2y_0(c-\beta)}$$
$$\times \frac{(x_0-\alpha)^2+(\beta+c)^2+y_0^2+2y_0(c+\beta)}{(x_0-\alpha)^2+(\beta+c)^2+y_0^2-2y_0(c+\beta)}$$
$$\left. \times \frac{(x_0+\alpha)^2+(\beta+c)^2+y_0^2+2y_0(c+\beta)}{(x_0+\alpha)^2+(\beta+c)^2+y_0^2-2y_0(c+\beta)} \right\}.$$

であるから, 仮定 (ii) から $|\beta| < c$ である事に注意すれば, もし $y_0 > 0$ なら右辺の各因子は > 1, また, もし $y_0 < 0$ なら右辺の各因子は < 1. 故に

$$\left|\frac{F_2(z_0+ic)}{F_2(z_0-ic)}\right| = \begin{cases} > 1 & \text{if } y_0 > 0, \\ < 1 & \text{if } y_0 < 0. \end{cases} \tag{5.15}$$

以上により $y_0 \neq 0$ とすれば (5.14) と (5.15) から $y_0 > 0$ ならば $|F(z_0+ic)/F(z_0-ic)| > 1$, $y_0 < 0$ ならば $|F(z_0+ic)/F(z_0-ic)| < 1$ となり (5.13) に矛盾する. 従って $y_0 = 0$. □

5.3. **定理の証明.** $\xi(s) = s(1-s)\widehat{\zeta}(s)$ とする. $\xi_{\mathbf{Q},2}(s)$ について

$$\xi_{\mathbf{Q},2}(s) = \frac{\xi(2s)-\xi(2s-1)}{2s(2s-1)(1-s)}.$$

$\xi(s)$ は種数 1 の整関数で, 関数等式 $\xi(s) = \xi(1-s)$ をもち, 垂直線 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 上で実数値をもつ. また $\xi(s)$ の零点は Riemann zeta $\zeta(s)$ の非自明零点と重複度も込めて一致するから, $\xi(s)$ は $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ の外に零点をもたない. 従っていま $F(z)$ を

$$F(z) := -\xi\left(\frac{1}{2}+2iz\right) \tag{5.16}$$

により定義すれば, $F(z)$ は $c = 1/4$ として補題の仮定を全て満たす. 故に $F(z+i/4) - F(z-i/4)$ の零点は全て実数.

$$\begin{aligned} F(z+i/4) - F(z-i/4) &= \xi(1+2iz) - \xi(2iz) \\ &= \xi(1+2iz) - \xi(1-2iz) \quad \text{(by the functional equation)} \\ &= \xi\left(2\left(\frac{1}{2}+iz\right)\right) - \xi\left(2-2\left(\frac{1}{2}+iz\right)\right) \\ &= iz(1+4z^2)\,\xi_{\mathbf{Q},2}\left(\frac{1}{2}+iz\right). \end{aligned}$$

により $\xi_{\mathbf{Q},2}\left(\frac{1}{2}+iz\right)$ の零点は全て実数であることが分った. □

Remark. For any algebraic field F, non-abelian zetas $\xi_{F,r}(s)$ are also defin ed in [5]. It is expected that the non-abelian zeta of rank 2 has the form

$$\xi_{F,2}(s) = c_F \left(\frac{\widehat{\zeta}_F(2s)}{s-1} - \frac{\widehat{\zeta}_F(2s-1)}{s} \right),$$

where $\widehat{\zeta}_F(s)$ is the completed Dedekind zeta function and c_F is the constant depending only on F ([1]). If the above is true, we can prove that the Riemann hypothesis for $\xi_{F,2}(s)$ is true by almost same arguments in this paper.

§3. The modified non-abelian zeta

In [6], the modified non-abelian zeta $\xi^T_{\mathbf{Q},r}(s)$ of rank 2 for $\mathbf{Q}$ is defined by

$$\xi^T_{\mathbf{Q},2}(s) := \int_{\mathcal{M}_{\mathbf{Q},2}^{\leq -\frac{1}{2}\log T}} \left(e^{h^0(\mathbf{Q},\Lambda)} - 1\right) \cdot e^{-s\deg(\Lambda)} d\mu(\Lambda), \quad \mathrm{Re}(s) > 2,$$

where $\mathcal{M}_{\mathbf{Q},2}^{\leq \frac{1}{2}\log T}$ is the moduli space of lattices Λ of rank 2 with volume 1 over $\mathbf{Q}$ whose sublattices Λ' of rank 1 have degrees $\leq -\frac{1}{2}\log T$. Note that $\mathcal{M}_{\mathbf{Q},2}^{\leq 0} = \mathcal{M}_{\mathbf{Q},2}$.

From our proof of Lemma, we find that if T is larger than 1, all zeros of $\xi^T_{\mathbf{Q},r}(s)$ are on the crtical line $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. In fact, as explained in [6], the modified non-abelian zeta $\xi^T_{\mathbf{Q},r}(s)$ can be expressed as

$$\xi^T_{\mathbf{Q},2}(s) = \frac{\xi(2s)T^{s-1} - \xi(2s-1)T^{-s}}{2s(2s-1)(1-s)}. \tag{5.17}$$

Therefore, $\xi^T_{\mathbf{Q},2}(s) = 0$ implies $|\xi(2s)/\xi(2-2s)|T^{2\mathrm{Re}(s)-1} = 1$.

Hence, if $\xi^T_{\mathbf{Q},2}(s) = 0$ for $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ and $T \geq 1$, $|\xi(2s)/\xi(2s-1)| \leq 1$. However $|\xi(2s)/\xi(2s-1)| > 1$ for $\mathrm{Re}(s) > 1/2$, because our proof of Lemma. Hence $\xi^T_{\mathbf{Q},2}(s)$ has no zeros in $\mathrm{Re}(s) > 1/2$. From the functional equation $\xi^T_{\mathbf{Q},2}(s) = \xi^T_{\mathbf{Q},2}(1-s)$, $\xi^T_{\mathbf{Q},2}(s) \neq 0$ for any $\mathrm{Re}(s) \neq 1/2$.

Althought, a pri-ori, $\xi^T_{\mathbf{Q},2}(s)$ is defined only for $T \geq 1$, we can define $\xi^T_{\mathbf{Q},2}(s)$ for $0 < T < 1$ by using (5.17). However, for sufficiently small $T > 0$, the Riemann hypothesis of $\xi^T_{\mathbf{Q},2}(s)$ is fails. That reasons are in the following clearly asymptotic formula:

$$\xi^T_{\mathbf{Q},2}(s) = \frac{\xi(2s-1)}{2s(2s-1)(s-1)} T^{-s} + o(T^{-\mathrm{Re}(s)}) \tag{5.18}$$

as $T \to +0$ for $\mathrm{Re}(s) > 1/2$. From (5.18), for sufficiently small T, $\xi^T_{\mathbf{Q},2}(s)$ may have zeros near the line $\mathrm{Re}(s) = 3/4$. In fact, for small T, we can find such zeros by numerical experiment.

References

[1] T.Hayashi and M.Suzuki, paper in preparation.

[2] A.A.Karatsuba, On zeros of the Davenport-Heilbronn function, Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, 1989), 1992, 271–293, Univ. Salerno, Salerno.

[3] J.C.Lagarias, Zero Spacing Distributions for Differenced L-Functions, preprint
[4] E.C.Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-function, Oxford, 1951; (Second ed. revised by D. R. Heath-Brown, 1986.)
[5] L.Weng, A Program for Geometric Arithmetic, arXiv:math.AG//0111241, 2001.
[6] L.Weng, Analytic Truncation and Rankin-Selberg versus Algebraic Truncation and Non-Abelian Zeta, RIMS Koukyuuroku, Kyoto University, Vol. 1324, 2003, 7–21.
[7] L.Weng, Stability and new non-Abelian zeta functitions, Number Theoretic Methods – Future Trends, S.Kanemitsu and C.Jia (eds.), Developments in Math. Vol.8, Kluwer Academic Publishers, 2002, 405–419

Graduate School of Mathematics,
Nagoya University,
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602,
Japan
e-mail address : m99009t@math.nagoya-u.ac.jp

References

[1] M.Suzuki, *A relation between the zeros of a L-function belonging to the Selberg class and the zeros of an associated L-function twisted by a Dirichlet character*, to appear in Archiv der Mathematik.
[2] M.Suzuki, *A relation between the zeros of the Riemann zeta-function and the zeros of automorphic L-functions* , preprint.