ゼータ関数の零点をわたる和について

鈴木正俊*

2004 年 1 月 15 日 (木)

1 導入

Riemann による革新的論文 [4] 以来, ゼータ関数の零点の分布の研究は重要なテーマの一つであり, それは現在知られている様々な種類のあるゼータ関数・L-関数についても同様である. そして零点の分布はその重要性から今まで非常に多くの研究がなされてきた. しかしそれは各々のゼータ関数の零点を個々に扱うものが殆どであり, 異なるゼータ関数の零点の間の関係を論じたものは少ない. 拙論においては「異なるゼータ関数の零点の間の関係性」を主題として論を進めたいと思う.

この主題について最初に得られた結果は Linnik [3] の Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ と Dirichlet$L$-関数 $L(s,\chi)$ の零点の間に成り立つ式

$$\sum_{\substack{L(\rho,\chi)=0\\ O<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \Gamma(\rho)x^{-\rho} \sim \frac{1}{\tau(\overline{\chi})}\sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(a) \sum_{\substack{\zeta(\rho)=0\\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \Gamma(\rho)\left(x-2\pi i\frac{a}{q}\right)^{-\rho} \quad (x\to 0+) \tag{1}$$

であると思う. ここで χ は mod q の primitive な Dirichlet 指標であり, $\tau(\chi)=\sum_{a=1}^{q}\chi(a)e(a/q)$, $e(X)=\exp(2\pi iX)$ である. Linnik が [3] で示したのは

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\chi(n)e^{-xn} = -\frac{1}{\tau(\overline{\chi})}\sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(a) \sum_{\substack{\zeta(\rho)=0\\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \Gamma(\rho)\left(x-2\pi i\frac{a}{q}\right)^{-\rho} + O(\log^2 x) \quad (x\to 0+) \tag{2}$$

($\Lambda(n)$ は von Mangoldt 関数) なのであるが左辺を書き換えてやると (1) の形になる.

* 名古屋大学多元数理科学研究科博士課程 3 年

我々は Linnik の結果のひとつの一般化として [5] において次の結果を得た.

定理　Selberg class に属する L-関数 $L(s)=\sum_{n\geq 1}a(n)n^{-s}$ と原始的 Dirichlet 指標 χ mod q が与えられた時, $L(s)$ の χ-twist $L_\chi(s)=\sum_{n\geq 1}a(n)\chi(n)n^{-s}$ もまた Selberg class に属し更に幾らかの条件を満たすならば, 適当なテスト関数 $h\in C_c^\infty(0,\infty)$ について漸近的な関係

$$\sum_{\substack{L_\chi(\rho)=0\\0\leq \mathrm{Re}(\rho)\leq 1}}\int_0^\infty h(xu)u^\rho\frac{du}{u}\quad\sim\sum_{\substack{L(\rho)=0\\0\leq \mathrm{Re}(\rho)\leq 1}}\int_0^\infty h(xu)\lambda_\chi(u)u^\rho\frac{du}{u}\quad(x\to 0+)\tag{3}$$

が成り立つ. 但しここで $\lambda_\chi(u)$ は

$$\lambda_\chi(u)=\frac{1}{\tau(\overline{\chi})}\sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(a)e(au/q)\tag{4}$$

で定義される $\mathbf{R}$ 上の関数.

Remark 1 $u\mapsto e^{-xu}$ は $C_c^\infty(0,\infty)$ に属さないが, 上記の定理を適用できるテスト関数のクラスはこれを含む程度まで拡張でき*1, 定理を $L(s)=\zeta(s)$, $h(u)=e^{-xu}$ に対して適用してやる事により (1) を得る事が出来る.

Riemann ゼータ関数, Dirichlet L-関数, Dedekind ゼータ関数, Hecke L-関数, 保型 L-関数等々は Selberg class に属する事が知られているから [1] 上記の定理から数論的に定義された多くの L-関数について, 2 つの異なる L-関数が χ-twist という関係にあるならばその零点の間にもある種の関係がある事が明らかとなった. 実際 V.G.Sprindzuk は [6] において $\zeta(s)$ の Riemann 予想を仮定した上で, $L(s,\chi)$ が Riemann 予想を満たす為の必要十分条件を $\zeta(s)$ の零点に関する条件で与えた. この V.G.Sprindzuk の結果は [5] において一般の Selberg class に属する L-関数に対して一般化されている.

ここに至って異なる L-関数の零点の間にある種の関係が存在する場合がもっとあるのではないかと考えるのは自然である. とはいえ何もヒントがない状態からではそれは見つけようもない. そこで我々は上記の定理の証明に立ち戻り, 何から零点の間の関係が導かれたのかを見る事によって次なる発見への足がかりとしよう.

いま $L(s)$ を Selberg class に属する関数とし, χ を primitive な Dirichlet 指標とする. また $L_\chi(s)$ も Selberg class に属すると仮定する. $\Lambda_L(n)$ を $-\frac{L'}{L}(s)=\sum_{n\geq 1}\Lambda_L(n)n^{-s}$ により定める.　テスト関数 $h(u)\in C_c^\infty(0,\infty)$ が一つ与えられているとき和 $\sum_{n\geq 1}\Lambda_L(n)\chi(n)h(n)$ を

*1 但し O-term の評価はもっと悪くなる.

(A) $\lambda_\chi(n)=\chi(n) \quad (\forall n \in \mathbf{Z})$, (B) Weil の明示公式,

を用いて 2 通りに計算する事により前述の定理は示される．その過程において (B) の Weil の明示公式は $L(s)$ 又は $L_\chi(s)$ の対数微分の Dirichlet 係数の情報を零点の情報に翻訳する為に用いられるだけであり, 零点の間の関係式が成り立つ由来は (A) にある事が見て取れる．そこで (A) が成り立つ理由を辿ると, それは primitive な Dirichlet 指標について成り立つよく知られた等式

$$\chi(n)=\frac{1}{\tau(\overline{\chi})}\sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(a)e(an/q) \quad (n \text{ は任意の整数}) \tag{5}$$

にある事が分かる．(5) の左辺は整数 n に対してしか意味を持たないが, 右辺においては n を整数以外の値としても意味あるものとなるというのがミソである．

本論では正則尖点形式 $f(z)=\sum_{n\geq 1}a(n)e(nz)\in S_k(\Gamma_0(N))$ のフーリエ係数について成り立つ等式

$$a(n)=\int_{\eta}^{\eta+1}f(z)e(-nz)dz, \quad (n\geq 1)$$

を (5) の類似と考える事により, ある L-関数とその χ-twist 以外の場合でも L-関数の零点の間に関係が見出せる事を示す.

2 諸結果.

以下終わりまで $(0,\infty)$ 上で定義された関数 $h(u)$ について, その Mellin 変換 $\int_0^\infty h(u)u^{s-1}du$ を $\widehat{h}(s)$ で表す.

2.1 $L(s,f)$ と $\zeta(s)$.

$\mathcal{H}=\{\tau\in\mathbf{C};\mathrm{Im}(\tau)>0\}$, $S_k(N)$ を $\mathcal{H}$ 上の weight k, level N の正則尖点形式全体のなすベクトル空間とする．但し $S_k(1)$ は S_k と表す事もある．よく知られている様に $S_k(N)$ の元 f は Fourier 展開

$$f(z)=\sum_{n\geq 1}^{\infty}a_f(n)e(nz)$$

をもつ．与えられた $f\in S_k(N)$ について, その Fourier 係数を用いて f に付随する L-関数 $L(s,f)$ が

$$L(s,f)=\sum_{n\geq 1}a_f(n)n^{-s}.$$

により定義される．Ramanujan-Deligue の評価 $a_f(n) \ll n^{(k-1)/2}d(n)$ により[*2]右辺の級数は右半平面 $\sigma > (k+1)/2$ で絶対収束する．また $L(s,f)$ は全 s 平面に整関数として解析接続され

$$\Lambda(s,f) = N^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,f)$$

とした時 $\Lambda(s,f)$ は関数等式

$$\Lambda(s,f) = \epsilon(-1)^{k/2}\Lambda(k-s,f)$$

を満たす．ここで $\varepsilon = \pm$ は $f(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{smallmatrix}\right)\cdot\tau) = \varepsilon f(\tau)$ により決定される. 更にもし $f \in S_k(N)$ が normalized Hecke-eigen cusp form ならば $L(s,f)$ は Euler 積表示

$$L(s,f) = \prod_{p|N} \frac{1}{1-a_f(p)p^{-s}} \prod_{p\nmid N} \frac{1}{1-a_f(p)p^{-s}+p^{k-1-2s}}.$$

を持つ事が知られている. いま関数 $\lambda_f : (0,\infty) \to \mathbf{C}$ を

$$\lambda_f(u) = e^{2\pi}\int_1^2 f(X+iu^{-1})e(-uX)dX \tag{6}$$

により定義する[*3]．定義より正整数 n については $\lambda_f(n) = a_f(n)$ である．また $\mathrm{Im}(z)^{k/2}|f(z)|$ が有界である事から $\lambda_f(u) \ll u^{k/2}$ はすぐ分かる．以上の準備のもと我々の結果は以下のように述べられる.

Theorem 1 $f \in S_k(N)$ を normalized Hecke-eigen cuspform とする．また $\zeta(s)$ の Riemann 予想を仮定する[*4]．この時 $h \in C_c^\infty(0,\infty)$ について

$$\sum_{\substack{L(\rho,f)=0 \\ \frac{k-1}{2}<\mathrm{Re}(\rho)<\frac{k+1}{2}}} \widehat{h}(\rho)x^{-\rho+\frac{k}{2}-\frac{1}{6}+\delta} \tag{7}$$

がある正数 δ について $x \to 0+$ のとき非有界ならば,

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{L(\rho,f)=0 \\ \frac{k-1}{2}<\mathrm{Re}(\rho)<\frac{k+1}{2}}} \int_0^\infty h(xu)u^\rho \frac{du}{u} \\ &\quad= \sum_{\substack{\zeta(\rho)=0 \\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \int_0^\infty h(xu)\lambda_f(u)u^\rho\frac{du}{u} + \frac{1}{2}\widehat{h}(\frac{k}{2})\cdot x^{-k/2} + O(x^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon}) \\ &\quad (x \to 0+) \end{aligned} \tag{8}$$

[*2] $d(n)$ は n の約数の個数.

[*3] どんな整数 m についても $\lambda_{f,m}(u) = e^{2\pi}\int_m^{m+1} f(X+iu^{-1})e(-uX)dX$ と定義すれば $\lambda_{f,m}(n) = a_f(n)$ となるし,$\lambda_{f,m_1}(u) = e(-u(m_1-m_2))\lambda_{f,m_2}(u)$ が成り立つから, 特にこの定義を採用する必然性はない. ただ $\lambda_{f,0}(u)$ を採用すると技術的に上手くゆかぬ部分がある.

[*4] この条件は「$\zeta(s)$ が $\mathrm{Re}(s) > \frac{2}{3} = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ に零点を持たない.」で置き換える事が可能.

が任意の正数 ε について成り立つ.

2.2 $L(s, f \otimes g)$ と $L(s, f)$, $\zeta(s)$.

2 つの normalized Hecke-eigen cusp form

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n) e(nz) \in S_k, \quad g(z) = \sum_{n \geq 1} b(n) e(nz) \in S_k$$

が与えられていて, それぞれに付随する L-関数の Euler 積は

$$L(s, f) = \prod_p (1 - a(p)p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1} = \prod_p [(1 - \alpha_p p^{-s})(1 - \beta_p p^{-s})]^{-1}.$$

$$L(s, g) = \prod_p (1 - b(p)p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1} = \prod_p [(1 - \gamma_p p^{-s})(1 - \delta_p p^{-s})]^{-1}.$$

であるとする. このとき Rankin-Selberg L-関数 $L(s, f \otimes g)$ を

$$L(s, f \otimes g) = \prod_p [(1 - \alpha_p \gamma_p p^{-s})(1 - \alpha_p \delta_p p^{-s})(1 - \beta_p \gamma_p p^{-s})(1 - \beta_p \delta_p p^{-s})]^{-1} \quad (9)$$

により定義する. $L(s, f \otimes g)$ は $\sigma > k$ において

$$L(s, f \otimes g) = \zeta(2s - 2k + 2) \sum_{n \geq 1} a(n) b(n) n^{-s}$$

という表示を持ち, 右辺の級数は $\sigma > k$ で絶対収束する. また

$$\Lambda(s, f \otimes g) = (4\pi)^{-s} \Gamma(s) \Gamma(s - k + 1) L(s, f \otimes g)$$

とおくとき関数等式

$$\Lambda(s, f \otimes g) = \Lambda(2k - 1 - s, f \otimes g)$$

を満たす. $L(s, f \otimes g)$ は $s = k, k-1$ で可能な一位の極を持つ他は正則で $s = k$ での留数は Petersson 内積 $\langle f, g \rangle$ の定数倍となる事が知られている[*5]. 従って特に $\langle f, g \rangle = 0$ ならば $L(s, f \otimes g)$ は $s = k$ で正則である. 以上の準備のもと我々の次の結果は以下の様に述べられる.

[*5] $\Lambda(s, f \otimes g) = \pi^{k-1} \int_{\mathcal{F}} f(z) \overline{g(z)} \widehat{E}(s - k + 1, z) d\mu(z)$ の表示と $\widehat{E}(s, z)$ が $s = 0, 1$ を除いて全 s 平面で正則である事による.

Theorem 2 相異なるとは限らない 2 つの normalized Hecke-eigen cuspform $f,\, g \in S_k$ が与えられているものとする．また$\zeta(s)$, $L(s, f\otimes f)$, $L(s, g\otimes g)$ の Riemann 予想を仮定する[*6]．もし $h\in C_c^{\infty}(0,\infty)$ について

$$\sum_{\substack{L(\rho,f)=0\\ k-1<\mathrm{Re}(\rho)<k}} \widehat{h}(\rho)x^{-\rho+\frac{2k-1}{2}-\frac{1}{6}+\delta} \tag{10}$$

がある正数 δ について $x\to+0$ のとき非有界ならば

$$\begin{aligned}
&-\widehat{h}(k)\delta_{f=g}x^{-k}+\sum_{\substack{L(\rho,f\otimes g)=0\\ k-1<\mathrm{Re}(\rho)<k}}\int_0^{\infty}h(xu)u^{\rho}\frac{du}{u}\\
&=\sum_{\substack{L(\rho,f)=0\\ \frac{k-2}{2}<\mathrm{Re}(\rho)<\frac{k+1}{2}}}\int_0^{\infty}h(xu)\lambda_g(u)u^{\rho}\frac{du}{u}+\frac{k-2}{2}\widehat{h}(\frac{2k-1}{2})\cdot x^{-\frac{2k-1}{2}}+O(x^{-\frac{2k-1}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon})\\
&=\sum_{\substack{\zeta(\rho)=0\\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}}\int_0^{\infty}h(xu)\lambda_f(u)\lambda_g(u)u^{\rho}\frac{du}{u}+\frac{2k-5}{2}\widehat{h}(\frac{2k-1}{2})\cdot x^{-\frac{2k-1}{2}}+O(x^{-\frac{2k-1}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon})\\
&(x\to+0)
\end{aligned} \tag{11}$$

が任意の正数 ε について成り立つ．但し $\delta_{f=g}$ は $f=g$ の時 1 でそれ以外は 0 とする．

3　証明

3.1　Weil's Explicit Formula.

まず Theorem1,2 双方の証明に用いる Weil の明示公式について述べる．

Proposition 1 [Weil's Explicit Formula]
次の 5 つの条件を満たす $\mathbf{C}$ 上の関数 $L(s)$ が与えられたとする．

S1. $L(s)$ は $\sigma>1$ で絶対収束する Dirichlet 級数表示 $L(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}$ を持つ．

S2. ある非負整数 m が存在して $(s-1)^mL(s)$ は有限位数の整関数となる．(この条件を満たす最小の m を m_L と表す.)

[*6] この条件も「$\zeta(s)$ が $\mathrm{Re}(s)>\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ に零点を持たない.」「Ł$(s,f\otimes f)$ が $\mathrm{Re}(s)>\frac{2k-1}{2}+\frac{1}{6}$ に零点を持たない.」等々で置き換える事が可能.

S3. ある $Q>0$, $r\in\mathbf{N}$, $\lambda_j>0$ $(1\le j\le r)$, $\mathrm{Re}(\mu_j)\ge 0$ $(1\le j\le r)$, $|\omega|=1$ について $\widehat{L}(s)=Q^s\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\lambda_j s+\mu_j)F(s)=\gamma(s)L(s)$ とおくと $\widehat{L}(s)$ は関数等式 $\widehat{L}(s)=\omega\overline{\widehat{L}(1-\bar{s})}$ を満たす.

S4. 任意の正数 ε について評価 $a(n)\ll n^{\varepsilon}$ が成り立つ.

S5. $\log L(s)=\sum_{n=1}^{\infty}b(n)n^{-s}$ と表示され $b(n)$ は $n=p^m$ $(m\ge 1)$ 以外では 0. しかもある $\theta<\frac{1}{2}$ について評価 $b(n)\ll n^{\theta}$ が成り立つ.

このとき, 全ての $h(u)\in C_c^{\infty}(\mathbf{R}_+^{\times})$ について[*7]次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}&m_L\,\widehat{h}(0)-\sum_{\rho}\widehat{h}(\rho)+m_L\,\widehat{h}(1)\\&\qquad=\sum_{n=1}^{\infty}\{\Lambda_L(n)h(n)+\overline{\Lambda_L(n)}h^*(n)\}+(2\log Q+d\,C_E)\,h(1)+\sum_{j=1}^{r}W_{\lambda_j,\mu_j}(h).\end{aligned}\tag{12}$$

ここで $\Lambda_L(n)=b(n)\log n$, $h^*(u)=u^{-1}h(u^{-1})$, C_E は Euler 定数, $d=2\sum_{j=1}^{r}\lambda_j$, また

$$\begin{aligned}W_{\lambda,\mu}(h)&=\int_1^{\infty}\left[h_{\lambda,\mu}(u)+h^*_{\lambda,\mu}(u)-2h(1)u^{(\mathrm{Re}(\mu)-1)/\lambda}\right]\frac{u^{(1-\mathrm{Re}(\mu))/\lambda}}{u^{1/\lambda}-1}\frac{du}{u},\\h_{\lambda,\mu}(u)&=h(u)u^{-i\,\mathrm{Im}(\mu)/\lambda}.\end{aligned}\tag{13}$$

(12) の左辺の和は $0\le\mathrm{Re}(\rho)\le 1$ を満たす全ての $F(s)$ の零点を重複度を込めてわたるものとし $\lim_{T\to\infty}\sum_{|\mathrm{Im}(\rho)|\le T}\widehat{h}(\rho)$ の意味で理解する. また (12) の右辺の和と積分は絶対収束している.

3.2 Theorem 1 の証明.

レベルが一般の場合も証明は殆ど同じなので, 簡単の為 $\Gamma_0(1)=SL_2(\mathbf{Z})$ の場合について示す. 以下 $f\in S_k$ を normalized Hecke-eigen cusp form とし f の Fourier 係数を $a(n)$ で表す. $1-a(p)X+p^{k-1}X^2=(1-\alpha_pX)(1-\beta_pX)$ により定まる α_p,β_p について Ramanujan-Deligue の評価 $|a(p)|\le 2p^{\frac{k-1}{2}}$ により, $|\alpha_p|=|\beta_p|=p^{\frac{k-1}{2}}$. また

$$a(p^m)=\sum_{0\le i\le m}\alpha_p^{m-i}\beta_p^{i},\quad (m\ge 1)\tag{14}$$

$$\alpha_p^m+\beta_p^m=a(p^m)-p^{k-1}a(p^{m-2}),\quad (m\ge 2)\tag{15}$$

[*7] テスト関数の条件はもっと弱められるが本論では必要ないので詳述しない. [5] 参照.

にも注意しておく．von Mangoldt 関数 $\Lambda(n)$ の類似として $\Lambda_f(n)$ を

$$\Lambda_f(n)=\begin{cases}(\alpha_p^m+\beta_p^m)\log p & n=p^m,\, m\geq 1 \text{ の時},\\ 0 & \text{それ以外},\end{cases} \tag{16}$$

と定義すれば,

$$-\frac{L'(s,f)}{L(s,f)}=\sum_{n\geq 1}\Lambda_f(n)n^{-s}. \tag{17}$$

ここで一つ補題を用意する．

Lemma 1

$$s_{0,j}(T)=\sum_p\sum_{\substack{j\leq m\\ p^m\leq T}}(\alpha_p^m+\beta_p^m)\log p,\qquad s_{1,j}(T)=\sum_p\sum_{\substack{j\leq m\\ p^m\leq T}}a(p^m)\log p$$

とおく．このとき任意の正数 ε に対し

$$|s_{i,j}(T)|\ll_{\varepsilon,j}T^{\frac{k-1}{2}+\frac{1}{j}+\varepsilon}\qquad (i=0,1,\, j\geq 1). \tag{18}$$

Proof. $A(p^m)=a(p^m)$, 又は $A(p^m)=\alpha_p^m+\beta_p^m$ とする．$|a(p^m)|=|\sum_{i=0}^n\alpha_p^{m-i}\beta_p^i|\leq (m+1)p^{m(k-1)/2}$, 及び $|\alpha_p^m+\beta_p^m|\leq 2p^{m(k-1)/2}$ から $|A(p^m)|\ll_\varepsilon p^{m((k-1)/2+\varepsilon)}$. 従って

$$\begin{aligned}\left|\sum_p\sum_{\substack{j\leq m\\ p^n\leq T}}A(p^m)\log p\right| &\ll_\varepsilon \sum_{p\leq T^{1/j}}\sum_{j\leq m\leq\frac{\log T}{\log p}}p^{m(\frac{k-1}{2}+\varepsilon)}\log p\leq\sum_{p\leq T^{1/j}}\sum_{1\leq m\leq\frac{\log T}{\log p}}p^{m(\frac{k-1}{2}+\varepsilon)}\log p\\ &\leq T^{\frac{k-1}{2}+\varepsilon}\log T^{1/j}\sum_{p\leq T^{1/j}}\sum_{j\leq m\leq\frac{\log T}{\log p}}1\leq\frac{1}{j\log 2}T^{\frac{k-1}{2}+\frac{1}{j}+\varepsilon}(\log T)^2.\end{aligned}$$

これで Lemma 1 の主張が得られた． □

いま $h\in C_c^\infty(0,\infty)$ を任意に一つ取り, $x>0$ に対し次の和を考える

$$S_2(x)=\sum_p\sum_{m=1}^2 h(xp^m)(\alpha_p^m+\beta_p^m)\log p. \tag{19}$$

h の台はコンパクトなので, この和は有限和である．1 以上の整数 n について $\lambda_f(n)=a(n)$ である事と Weil's Explicit Formula を用いてこの和を 2 通りに計算する事により Theorem 1 の主張が得られる．まず次の事を示す．

Claim 1 十分小さい $x > 0$ について

$$-S_2(x) = \sum_{\substack{L(\rho,f)=0 \\ (k-1)/2<\mathrm{Re}(s)<(k+1)/2}} \widehat{h}(\rho)x^{-\rho} + O(x^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon}). \tag{20}$$

Proof of Claim 1. $S_2(x)$ の定義より

$$S_2(x) = \sum_{n\geq 1} \Lambda_f(n)h(xn) - \sum_p \sum_{m\geq 3} h(xp^m)(\alpha_p^m + \beta_p^m)\log p.$$

ここで右辺の第 2 項を Lemma 1 と partial summation を用いて計算する事により

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_f(n)h(xn) + O(x^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon}) \tag{21}$$

を得る．ここで $L(s) = L(s+\frac{k-1}{2}, f)$ とおくと $\Lambda_L(n) = n^{-\frac{k-1}{2}}\Lambda_f(n)$ であり $L(s)$ は Proposition 1 の条件を満たすから, $L(s)$ と $u \mapsto u^{\frac{k-1}{2}}h(xu)$ について Proposition 1 を適用すれば $L(s,f)$ が整関数である事により

$$\begin{aligned}-S_2(x) = &\sum_{\substack{F(\rho)=0 \\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \widehat{h}(\frac{k-1}{2}+\rho)x^{-\frac{k-1}{2}-\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\Lambda_F(n)}n^{-\frac{k+1}{2}}h(xn^{-1}) \\ &+ (2\log 2\pi + 2\,C_E)\,h(x) + W_{1,\frac{k-1}{2}}(u \mapsto u^{\frac{k-1}{2}}h(xu)) + O(x^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon})\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで h がコンパクト台である事により十分小さい $x > 0$ について右辺の第 2,3 項は 0．また十分小さい $x > 0$ について

$$W_{1,\frac{k-1}{2}}(u \mapsto u^{\frac{k-1}{2}}h(xu)) = \int_1^{\infty} h(xu)\frac{du}{u-1}$$

だから $\int_1^{\infty} h(xu)(u-1)^{-1}du \to \widehat{h}(0)$ $(x \to 0+)$ により第 4 項も誤差項に吸収される．以上により Claim 1 が示された． □

次に $\alpha_p + \beta_p = a(p)$, $\alpha_p^2 + \beta_p^2 = a(p^2) - p^{k-1}$ により和 $S_2(x)$ を

$$S_2(x) = \sum_p \sum_{m=1}^{2} a(p^m)\log p - \sum_p h(xp^2)p^{k-1}\log p =: S_{2,1}(x) - S_{2,2}(x) \tag{22}$$

と分割し, $S_{2,1}(x)$, $S_{2,2}(x)$ について次を示す.

Claim 2 十分小さい $x > 0$ について

$$-S_{2,1}(x) = \sum_{\substack{\zeta(\rho)=0 \\ 0<\mathrm{Re}(s)<1}} \int_0^{\infty} h(xu)\lambda_f(u)u^{\rho}\frac{du}{u} + O(x^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon}). \tag{23}$$

Claim 3 $\zeta(s)$ が $\sigma > \sigma_0$ において零点を持たないと仮定する．このとき十分小さい $x > 0$ について

$$S_{2,2}(x) = \frac{1}{2}\widehat{h}(\frac{k}{2})x^{-k/2} + O(x^{-k/2+(1-\sigma_0)/2-\varepsilon}). \tag{24}$$

Proof of Claim 2. 定義と Lemma 1 により Claim 1 の時と同様にして

$$\begin{aligned} S_{2,1}(x) &= \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} h(xp^m)a(p^m)\log p + O(x^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)a(n)h(xn) + O(x^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon}). \end{aligned}$$

ここで $\Lambda(n)$ は通常の von Mangoldt 関数．また第 1 項の和は実質有限和．いま $\lambda_f(u)$ の定義 (6) を思い出すと正整数 n について $\lambda_f(n) = a(n)$ だから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)a(n)h(xn) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\lambda_f(n)h(xn). \tag{25}$$

(25) の右辺に現れる $u \mapsto \lambda_f(u)h(xu)$ は $C_c^{\infty}(\mathbf{R}_+^{\times})$ に属すから $\zeta(s)$ と $u \mapsto \lambda_f(u)h(xu)$ について Proposition 1 を適用すれば

$$\begin{aligned} -\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\lambda_f(n)h(xn) &= -\int_0^{\infty} h(xu)\lambda_f(u)\frac{du}{u} - \int_0^{\infty} h(xu)\lambda_f(u)du \\ &+ \sum_{\substack{\zeta(\rho)=0 \\ 0<\mathrm{Re}(s)<1}} \int_0^{\infty} h(xu)\lambda_f(u)u^{\rho}\frac{du}{u} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n}h(xn^{-1})\lambda_f(n^{-1}) + (\log\pi + C_E)\,h(x) \\ &+ \int_1^{\infty}\left[h(xu)\lambda_f(u) - u^{-1}h(xu^{-1})\lambda_f(u^{-1}) - \frac{2}{u^2}h(x)\right]\frac{udu}{u^2-1}. \end{aligned}$$

Claim 1 の証明と全く同様に十分小さい $x > 0$ について

$$\begin{aligned} -\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\lambda_f(n)h(xn) = &\sum_{\substack{\zeta(\rho)=0 \\ 0<\mathrm{Re}(s)<1}} \int_0^{\infty} h(xu)\lambda_f(u)u^{\rho}\frac{du}{u} \\ &- \int_0^{\infty} h(xu)\lambda_f(u)\frac{du}{u} - \int_0^{\infty} h(xu)\lambda_f(u)du + O(1). \end{aligned} \tag{26}$$

ここで (26) の第 2,3 項について, 部分積分を繰り返し用いる事により, 任意の自然数 N について

$$\int_0^{\infty} h(xu)\lambda_f(u)\frac{du}{u}, \quad \int_0^{\infty} h(xu)\lambda_f(u)du = O(x^{N-\frac{k}{2}-1}). \tag{27}$$

実際, ある定数 C について $Y^{k/2}|f(X+iY)| \le C$ だから,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty h(xn)\lambda_f(u)du &= e^{2\pi}\int_1^2 f(X+iu^{-1})\int_0^\infty h(xu)e(-uX)dudX \\ &= x^{N-1}\cdot e^{2\pi}\int_1^2 f(X+ixv^{-1})\int_0^\infty h^{(N)}(v)(-2\pi iX)^{-N}e(-uX)dudX \\ &\le x^{N-1-k/2}\cdot(2\pi)^{-N}e^{2\pi}\int_0^\infty v^{k/2}|h^{(N)}(v)|\int_1^2 (xv^{-1})^{k/2}|f(X+ixv^{-1})|dXdu \\ &\le x^{N-1-k/2}\cdot C(2\pi)^{-N}e^{2\pi}\int_0^\infty v^{k/2}|h^{(N)}(v)|du.\end{aligned}$$

以上により (26) と (27) から Claim 2 が従う. □

Proof of Claim 3. いま $\vartheta(u)$ を

$$\vartheta(u) = \sum_{p\le u}\log p$$

とする. また $\psi(u) = \sum_{n\le u}\Lambda(n)$ とする. このとき $\vartheta(u) = \psi(u) + O(u^{1/2}(\log u)^2)$ が成り立つ事はよく知られている. $S_{2,2}(x)$ は partial summation により $\vartheta(u)$ を用いて

$$S_{2,2}(x) = \int_0^\infty \vartheta(u)(u^{k-1}h(xu^2))'du \tag{28}$$

と表示される. よく知られている様に, 任意の $c_0 > c > 1$, $R \ge 1$ について

$$\psi(u) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iR}^{c+iR}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{u^s}{s}ds + O\left(\frac{u^c}{R(c-1)}\right) + O\left(\frac{u\log u}{R}\right) \tag{29}$$

が成り立つ. (29) から $\zeta(s)$ が $1/2 \le \sigma_0 < \sigma < 1$ に零点を持たないならば $\psi(u) = u + O(u^{\sigma_0+\varepsilon})$ が示されるから,

$$\begin{aligned}S_{2,2}(x) &= \int_0^\infty \psi(u)(u^{k-1}h(xu^2))'du + O\left(\int_0^\infty u^{1/2+\varepsilon}|(u^{k-1}h(xu))'|\right) \\ &= \int_0^\infty h(xu^2)u^k\frac{du}{u} + O\left(\int_0^\infty u^{\sigma_0+\varepsilon}|(u^{k-1}h(xu))'|du\right) \\ &= \frac{1}{2}\widehat{h}(\frac{k}{2})x^{-k/2} + O\left(x^{-\frac{k}{2}+\frac{1-\sigma_0}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\int_0^\infty v^{\frac{\sigma_0+\varepsilon}{2}}(v^{\frac{k-3}{2}}|h(v)| + v^{\frac{k-1}{2}}|h'(v)|)dv\right) \\ &= \frac{1}{2}\widehat{h}(\frac{k}{2})x^{-k/2} + O\left(x^{-\frac{k}{2}+\frac{1-\sigma_0}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\right)\end{aligned}$$

これで Claim 3 が示された. □

ここで今まで得られた (20),(22) (23), (24) を組み合わせれば Theorem 1 の主張が得られる. □

3.3 Theorem 2 の証明.

証明の手法は Theorem 1 と同様の部分が多いので概略を述べるに止める. $\Lambda_{f\otimes g}(n)$ を

$$\Lambda_{f\otimes g}(n)=\begin{cases}(\alpha_p^m+\beta_p^m)(\gamma_p^m+\delta_p^m)\log p & n=p^m,\ m\geq 1 \text{ の時},\\ 0 & \text{それ以外},\end{cases} \tag{30}$$

と定義する. この時

$$-\frac{L'(s,f\otimes g)}{L(s,f\otimes g)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_{f\otimes g}(n)n^{-s} \tag{31}$$

であり Lemma 1 の証明と同様にして次が成り立つ.

Lemma 2

$$s_{3,j}(T)=\sum_p\sum_{\substack{j\leq m\\ p^m\leq T}}(\alpha_p^m+\beta_p^m)(\gamma_p^m+\delta_p^m)\log p \tag{32}$$

とすると任意の正数 ε に対し

$$|s_{3,j}(T)|\ll_{\varepsilon,j}T^{k-1+\frac{1}{j}+\varepsilon}\quad (j\geq 1). \tag{33}$$

$h\in C_c^{\infty}(0,\infty)$ を任意に一つ取り, $x>0$ に対し次の和を考える.

$$S_4(x)=\sum_p\sum_{m=1}^{2}h(xp^m)(\alpha_p^m+\beta_p^m)(\gamma_p^m+\delta_p^m)\log p. \tag{34}$$

この和を 2 通りに計算する事により定理の主張を導くという筋は前節と同様.

まず Lemma 2 を用いて

$$S_4(x)=\sum_{n\geq 1}\Lambda_{f\otimes g}(n)h(xn)+O(x^{-\frac{2k-1}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon})$$

を言う. そして $L(s)=L(s+k-1,f\otimes g)$ と $u\mapsto u^{k-1}h(xu)$ に対し Proposition 1 を適用する事により十分小さい $x>0$ について

$$S_4(x)=\widehat{h}(k)\delta_{f,g}x^{-k}-\sum_{\substack{L(\rho,f\otimes g)=0\\ k-1\leq \mathrm{Re}(\rho)\leq k}}\widehat{h}(\rho)x^{-\rho}+O(x^{-\frac{2k-1}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon}). \tag{35}$$

が得られる．一方, $S_4(x)$ を

$$S_4(x) = \sum_p \sum_{m=1}^{2} \Lambda_f(p^m) h(xp^m) b(p^m) \log p - \sum_p \Lambda_f(p^2) h(xp^2) p^{k-1} \\ =: S_{4,1}(x) - S_{4,2}(x) \tag{36}$$

と分割すると, Lemma 2 により

$$S_{4,1}(x) = \sum_{n \geq 1} \Lambda_f(n) h(xn) b(n) + O(x^{-\frac{2k-1}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon})$$

が分かる． ここで $\sum_{n\geq 1} \Lambda_f(n)h(xn)b(n)$ を $\sum_{n\geq 1} \Lambda_f(n)h(xn)\lambda_g(n)$ と書き換えて, $L(s) = L(s+\frac{k-1}{2}, f)$ と $u \mapsto u^{\frac{k-1}{2}} h(xu)\lambda_g(u)$ に対して Proposition 1 を適用する事により

$$-S_{4,1}(x) = \sum_{\substack{L(\rho,f)=0 \\ \frac{k-1}{2} < \mathrm{Re}(\rho) < \frac{k+1}{2}}} \int_0^\infty h(xu)\lambda_g(u) u^\rho \frac{du}{u} + O(x^{-\frac{2k-1}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon}). \tag{37}$$

また $S_{4,2}(x)$ について

$$\Lambda_f(p^2) = (\alpha_p^2 + \beta_p^2)\log p = [(\alpha_p + \beta_p)^2 - 2\alpha_p\beta_p] \log p \\ = \Lambda_{f\otimes f}(p) - 2p^{k-1}\log p$$

から

$$S_{4,2}(x) = \sum_p h(xp^2) p^{k-1} \Lambda_{f\otimes f}(p) - 2\sum_p h(xp^2) p^{2k-2} \log p \\ =: S_{4,3}(x) - 2S_{4,4}(x).$$

Partial summation により

$$S_{4,3}(x) = \int_0^\infty \sum_{p \leq u} \Lambda_{f\otimes f}(p) \cdot (u^{k-1} h(xu^2))' du. \tag{38}$$

$L(s, f\otimes f)$ が $s = k$ に極を持つ事と $L(s, f\otimes f)$ の Riemann 予想から

$$\sum_{p \leq T} \Lambda_{f\otimes f}(p) = T^k + O(T^{\frac{2k-1}{2}+\varepsilon}) \tag{39}$$

が導かれるので, これを (38) に用いると

$$S_{4,3}(x) = k \int_0^\infty h(xu^2) u^{2k-1} \frac{du}{u} + O(x^{-\frac{2k-1}{2}+\frac{1}{4}-\varepsilon}). \tag{40}$$

また
$$S_{4,4}(x)=\int_0^\infty \vartheta(u)(u^{2k-2}h(xu^2))'du.$$
であるので, $\zeta(s)$ の Riemann 予想から従う評価
$$\vartheta(u)=u+O(u^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$
を用いれば
$$S_{4,4}(x)=\int_0^\infty u^{2k-1}h(xu^2)\frac{du}{u}+O(x^{-\frac{2k-1}{2}+\frac{1}{4}-\varepsilon}). \tag{41}$$
最後に (35), (37), (40), (41) を組み合わせれば Theorem 2 の前半の主張が得られる.

Theorem 2 の後半の主張を得るため $S_4(x)$ を次の様に分割する.
$$\begin{aligned}S_4(x)=&\sum_p\sum_{m=1}^{2}h(xp^m)a(p^m)b(p^m)\log p-\sum_p h(xp^2)a(p^2)p^{k-1}\log p\\&-\sum_p h(xp^2)b(p^2)p^{k-1}\log p+\sum_p h(xp^2)p^{2k-2}\log p\\=:&\,S_{4,5}(x)-S_{4,6}(x)-S_{4,7}(x)+S_{4,8}(x)\end{aligned} \tag{42}$$
$S_{4,6}(x)$, $S_{4,7}(x)$ の計算は $S_{4,2}(x)$ の計算と全く同様であり, $S_{4,8}(x)$ の計算は $S_{4,4}(x)$ の計算と全く同様だから略す. 結果のみ記せば
$$S_{4,6}(x)+S_{4,7}(x)-S_{4,8}(x)=(2k-5)\int_0^\infty h(xu^2)u^{2k-1}\frac{du}{u}+O(x^{-\frac{2k-1}{2}+\frac{1}{4}-\varepsilon}). \tag{43}$$
最後に $S_{4,5}(x)$ について計算する. まず
$$S_{4,5}(x)=\sum_{n\geq 1}\Lambda(n)a(n)b(n)h(xn)+O(x^{-\frac{2k-1}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon}).$$
ここで $\sum_{n\geq1}\Lambda(n)a(n)b(n)h(xn)$ を $\sum_{n\geq1}\Lambda(n)\lambda_f(n)\lambda_g(n)h(xn)$ で置き換えて $\zeta(s)$ と $u\mapsto h(xn)\lambda_f(n)\lambda_g(n)$ について Proposition 1 を適用すれば
$$\begin{aligned}-\sum_{n\geq1}\Lambda(n)a(n)b(n)h(xn)=&\sum_{\substack{\zeta(\rho)=0\\0<\mathrm{Re}(\rho)<1}}\int_0^\infty h(xu)\lambda_f(u)\lambda_g(u)u^\rho\frac{du}{u}\\&-\int_0^\infty h(xu)\lambda_f(u)\lambda_g(u)du-\int_0^\infty h(xu)\lambda_f(u)\lambda_g(u)\frac{du}{u}+O(x^{-\frac{2k-1}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon})\end{aligned}$$
が得られる. 右辺の第 2,3 項は $x\to+0$ のとき $o(1)$ である事が分かるので結局
$$-S_{4,5}(x)=\sum_{\substack{\zeta(\rho)=0\\0<\mathrm{Re}(\rho)<1}}\int_0^\infty h(xu)\lambda_f(u)\lambda_g(u)u^\rho\frac{du}{u}+O(x^{-\frac{2k-1}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon}). \tag{44}$$
得られた (35), (43), (44) 達を組み合わせれば Theorem 2 の後半の主張が得られる. □

4 あとがき.

最後に, 残された幾つかの問題とそれに対するコメントを記して今回の試みの締めくくりとする.

問題 1. [5, Th.2] の等式の一般化. 即ち $\zeta(s)$, $L(s,f)$, $L(s,f\otimes g)$ の零点の間の関係を完全な等式として記述する事. もしこれが可能となれば [5] と同様に, 拙論の Theorem1,2 をより一般的等式の特殊化として示す事が出来る.

問題 2. Normalized Hecke eigen cusp form $f(z)=\sum_{n\geq 1}a(n)e(nz)\in S_k^{\mathrm{new}}(N)$ と一般の Selberg class の元 $L(s)=\sum_{n\geq 1}c(n)n^{-s}$ について $L(s)$ と $L_f(s)=\sum_{n\geq 1}a(n)c(n)n^{-s}$ の零点の間の関係を調べる事.

問題 3. 拙論と [5] で示した関係式にはある意味で向きがついている (“twisted” Mellin 変換の和 $\to$Mellin 変換の和). 例えば $\zeta(s)\to L(s,\chi)$, $\zeta(s)\to L(s,f)$, $L(s,f)\to L(s,f\otimes g)$ 等々. これらの矢印の向きを逆にする事は可能だろうか？[*8]

問題 4. [5, Th.3] において $L_\chi(s)$ のリーマン予想は $L(s)$ の臨界線上の零点の分布のある性質と同値である事を示した. $L(s,f)$ や $L(s,f\otimes g)$ のリーマン予想と同値な $\zeta(s)$ の性質とは何だろうか？これが問題 3 と密接に関係するだろうという事は用意に想像される.

問題 5. $\lambda_f(u)$ の性質を調べる事. $\lambda_f(u)$ は $\lambda_\chi(u)$ の類似として妥当か？その妥当性やよりよい類似の定義は問題 1,2,3 を考察する上で重要になってくると思われる. また任意の正数 ε に対し $|\lambda_f(u)|\ll_\varepsilon u^{(k-1+\varepsilon)/2}$ か？等々

以下 $\mathbf{A}$ を $\mathbf{Q}$ 上のアデール環とする.

問題 6. π を $\mathrm{GL}(n)_{\mathbf{A}}$ のカスプ的保型表現, σ を $\mathrm{GL}(m)_{\mathbf{A}}$ のカスプ的保型表現とする. この時 $L(s,\pi\otimes\sigma)$ と $L(s,\pi)$ の零点の間には何らかの関係 (“functoriality”？ [7, 8]) があると思われる. それを正確に定式化する事.

いま primitive な Dirichlet 指標は $GL(1)_{\mathbf{A}}$ の保型表現に対応し, normalized Hecke-eigen cusp form $f\in S_k$ は $\mathrm{GL}(2)_{\mathbf{A}}$ のカスプ的保型表現 π_f に対応して $L(s,\pi_f)=L(s+\frac{k-1}{2},f)$ であった事を思い出しておく. 得られた結果は保型 L-関数の立場から見る

[*8] この矢印の向きは埋め込み $\iota^{m,n}:\mathrm{GL}(m)\to\mathrm{GL}(n); g\mapsto\left(\begin{smallmatrix} g & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ $(n>m)$ に由来しているものと思われる (cf. [7]).

と適当なテスト関数 h に対して

$$\sum_{\substack{L(\rho,\pi_f\otimes\chi)=0\\0<\mathrm{Re}(\rho)<1}}\int_0^\infty h(xu)u^\rho\frac{du}{u} \sim \sum_{\substack{L(\rho,\pi_f)=0\\0<\mathrm{Re}(\rho)<1}}\int_0^\infty h(xu)\lambda_\chi(u)u^\rho\frac{du}{u} \quad (x\to+0) \tag{45}$$

$$\sum_{\substack{L(\rho,\pi_f\otimes\pi_g)=0\\0<\mathrm{Re}(\rho)<1}}\int_0^\infty h(xu)u^\rho\frac{du}{u} \sim \sum_{\substack{L(\rho,\pi_f)=0\\0<\mathrm{Re}(\rho)<1}}\int_0^\infty h(xu)\lambda_g(u)u^\rho\frac{du}{u} \quad (x\to+0), \tag{46}$$

また

$$\sum_{\substack{L(\rho,1\otimes\pi_f)=0\\0<\mathrm{Re}(\rho)<1}}\int_0^\infty h(xu)u^\rho\frac{du}{u} \sim \sum_{\substack{L(\rho,1)=0\\0<\mathrm{Re}(\rho)<1}}\int_0^\infty h(xu)u^{\frac{1-k}{2}}\lambda_f(u)u^\rho\frac{du}{u} \quad (x\to+0) \tag{47}$$

$$\sum_{\substack{L(\rho,1\otimes\pi_f\otimes\pi_g)=0\\0<\mathrm{Re}(\rho)<1}}\int_0^\infty h(xu)u^\rho\frac{du}{u} \sim \sum_{\substack{L(\rho,1)=0\\0<\mathrm{Re}(\rho)<1}}\int_0^\infty h(xu)u^{1-k}\lambda_f(u)\lambda_g(u)u^\rho\frac{du}{u} \quad (x\to+0) \tag{48}$$

が成立っているという事である．ここで大胆に[*9]想像して次の様な予想を立ててみる．

予想. $\pi\not\simeq\sigma,\check{\sigma}$ のとき, “π のみで”決まる $\mathbf{R}_+^\times$ 上の関数 $\lambda_\pi(u)$ と “σ のみで”決まる $\mathbf{R}_+^\times$ 上の関数 $\lambda_\sigma(u)$ が存在して, π と σ から決まる部分空間 $V_{\pi,\sigma}\subset C_c^\infty(\mathbf{R}_+^\times)$ の任意の元 h について

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{L(\rho,\pi\otimes\sigma)=0\\0<\mathrm{Re}(\rho)<1}}\int_0^\infty h(xu)u^\rho\frac{du}{u} &\sim \sum_{\substack{L(\rho,\pi)=0\\0<\mathrm{Re}(\rho)<1}}\int_0^\infty h(xu)\lambda_\sigma(u)u^\rho\frac{du}{u} \quad (x\to+0)\\ &\sim \sum_{\substack{L(\rho,\sigma)=0\\0<\mathrm{Re}(\rho)<1}}\int_0^\infty h(xu)\lambda_\pi(u)u^\rho\frac{du}{u} \quad (x\to+0).\end{aligned} \tag{49}$$

ここで “◯のみで”は “何らかの意味で◯のみから一意的に”の意味.

もちろんこんな都合の良い状況を期待するのは間違いかもしれない. しかし問題 1 の所でも述べたが, **予想**に表れる様な漸近的関係はもっと explicit な関係式の特殊化として現れていると想像される．$L(s,\pi\otimes\sigma)$ と $L(s,\pi)$ の零点の間の explicit な関係はそれがあるとしても非常に複雑であろうし現段階では全く想像できないが[*10], それを特殊化した後に

[*9] 「安直に」とも「貧弱な発想で」とも言えるかもしれないが.

[*10] しかしその存在は [7] で述べられている $\mathrm{GL}(n)_{\mathbf{A}}$ 上の distribution Δ_n と “π の指標”(誤解を招く表現だと思うが適当な表現が浮かばないので) $\tilde{\chi}_\pi$ と $L(s,\pi)$ の零点の和の関係 ($n\geq 3$ の場合は予想) から示唆される.

得られる漸近的な関係としてはこの様な状況になっていてもよいと思われるのである．そして暫し楽観的にこの様な事が成立っていると夢想してみる．この時 (49) において特に $\sigma = \mathbf{1}$ (単位表現) とする事で

$$\sum_{\substack{L(\rho,\pi)=0\\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \int_0^\infty h(xu)u^\rho \frac{du}{u} \quad \sim \sum_{\substack{\zeta(\rho)=0\\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \int_0^\infty h(xu)\lambda_\pi(u)u^\rho \frac{du}{u} \quad (x \to +0) \tag{50}$$

が得られ, Riemann ゼータ関数には保型 L-関数の零点の情報も編み込まれている事が明示される．また幾つかのカスプ的保型表現 $\pi_0, \pi_1, \ldots$ について (49) を経由して $L(s, \pi_i)$ の零点が互いに影響しあっている様を見てとる事ができる．

問題 7. GUE 予想との関連を明らかにする事.

GUE 予想とは最初 Montgomery が Riemann ゼータ関数の零点の虚部の差の分布に関して提出した予想である．まずその予想について説明しよう．T を十分大きい正数, $0 < \alpha < \beta$ とし, γ,γ' は $\zeta(s)$ の虚部を表すとする．この時, $0 < \gamma \le T$, $0 < \gamma' \le T$ なる対 (γ, γ') で, 条件

$$\frac{2\pi\alpha}{\log T} \le \gamma - \gamma' \le \frac{2\pi\beta}{\log T}$$

を満たすものの個数を $\mathcal{M}(T)$ とおくと

$$\mathcal{M}(T) \sim \frac{1}{2\pi} T \log T \int_\alpha^\beta \left(1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2\right) du$$

となるであろうというのが Montgomery の提出した予想であり, 右辺に現れる密度関数

$$1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2$$

が Gaussian unitary ensemble (GUE) と呼ばれる確率分布の記述に現れるものである事を指摘したのは物理学者 Dyson である．

その後 Sarnak らに代表される多くの研究がなされ, 数論的に重要な多くの L-関数の虚部の差の分布が GUE に従うであろうと予想されたが, オリジナルの $\zeta(s)$ の場合についてもまだ未解決である*11．ここで不思議なのは, 予想に挙がっている L-関数はそれぞれ異なるのに, その虚部の差の分布はどれも同じ確率分布に従うと予想される事である．

*11 2003 年 12 月時点.

しかし, もし問題 6 の後で夢想した状況に "だいたいは" なっているとすれば数論的に重要な L-関数の零点は $\zeta(s)$ を根幹として密接に関係し合っている事になる. この描像のもとでは, 多くの L-関数の虚部の差の分布が同様な振る舞いを示す (と予想される) のも尤もらしく思えてくる.

参考文献

[1] J.Kaczorowski, A.Perelli, *The Selberg class: a survey*, Arch. Math. (Basel) 80 (2003), no. 3, 255–263.

[2] S.Lang, *Algebraic Number Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA 1970.

[3] Ju.V.Linnik: *On the expression of the zeros of L-series by means of ζ-function*, (Russian) Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.) 57, (1947). 435–437.

[4] B. Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse,* Monat. der Königl. Peuss. Akad. der Wissen. zu Berlin ausder Jahre (1859), 671-680

[5] M.Suzuki, *A relation between the zeros of a L-function belonging to the Selberg class and the zeros of an associated L-function twisted by a Dirichlet character*, preprint.

[6] V.G.Sprindzuk, *Vertical distribution of the zeros of zeta-function and extended Riemann hypotesis*, (Russian) Acta Arith. 27 (1975), 317–332.

[7] H.Yoshida, *On a certain distribution on $GL(n)$ and explicit formulas*, Proc. Japan Acad. Ser. A, 63 (1987), 396–399.

[8] H.Yoshida, *On calculations of zeros of various L-functions*, 保型形式シンポジウム報告集（於 城崎町城崎会議所 1993), 42–47.