On subspaces of the Hardy space related to zeros of zeta functions

東京大学大学院 数理科学研究科　鈴木正俊 (Suzuki Masatosi)
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

1. はじめに

まず研究集会時のアブストラクトを再掲する：ハーディ空間上の自然な作用素の一つとして、独立変数の掛け算作用素 M がある．今回、上半平面上のハーディ空間 $H^2(\mathbb{C}^+)$ の M 不変部分空間 W を適当に選ぶ事によって、ゼータ関数の零点を W の直交補空間上で M の固有値として実現する試みついて話す．また、これに関連したリーマン予想の必要十分条件について述べる．A.Connes のゼータ関数の零点のスペクトル解釈との類似性・相違点についても触れる予定である．

研究集会の講演では, 内容をこの中のリーマン予想の必要十分条件に絞り, 背景にあるハーディ空間の話は後半で簡単に触れるだけだけに留めた．当然, 何故こういった事を考えるのかといった動機付けについても触れられなかった．そこでこの稿では, この背景や動機付けにウェイトを置いて解説したいと思う．

2. 背景と動機

2.1. Hilbert-Pólya 予想. 最初の動機は Hilbert-Pólya 予想にある．これは Riemann 予想 (RH) が正しいとすれば, Riemann ゼータ関数の零点 (の虚部) は, ある Hilbert 空間 H 上の (非有界な) 自己共役作用素 D の固有値になっているのではないか, という予想である [1]．そして, Riemann 予想の証明方針として最も有望視されているのは, この Hilbert-Pólya 予想を実現するペア (D,H) の構成である．つまり, 非自明な仮定無しに (D,H) を構成し, それが期待通りのものだと示すという方針である．

この予想を後押しする最初の結果は, Selberg の跡公式の理論 [16] であった．Selberg は彼の跡公式の理論を用いて, ある Hilbert 空間上の自己共役作用素の固有値を丁度その非自明零点に持つような Riemann ゼータ関数の類似物 (Selberg ゼータ関数) を構成して見せた．その後, Dyson, Montgomery, Odlyzko により, Hilbert-Pólya 予想を状況的に裏付ける Riemann ゼータ関数自身の性質として, 非自明零点の虚部の分布に関する予想 (2 点相関予想) が提出された ([12,14])．これは Rudnick-Sarnak [15] により補強され, ランダム行列の理論をゼータ関数へ応用する一分野となって, 現在でも活発に研究されている．

---

[1] この予想の経緯が次のサイトにある: Andrew M. Odlyzko, Correspondence about the origins of the Hilbert-Pólya Conjecture, `http://www.dtc.umn.edu/ odlyzko/polya/index.html`

2.2. **Selbergの理論.** ここでSelbergの理論を少し詳しく見てみる．標準的な記法は説明を省略する事があるので, 必要なら [5,7] などを参照して欲しい. $\mathfrak{H} = \{z = x + iy \mid y > 0\}$ を上半平面, $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ とする．商空間 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 上の通常の $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ 不変測度に対する L^2 空間を $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ で表す．ラプラシアン $\Delta = -y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)$ は $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ 不変で, $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上の自己共役作用素を誘導する．これも同じ記号 Δ で表す:

$$\Delta : L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H}) \to L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H}).$$

(簡単のため, 作用素の定義域や自己共役拡張に関する事項は省略した.)

ここで次の部分空間を考える:

$$\mathcal{E} := \overline{\{E_\psi \mid \psi \in C_c^\infty(0, \infty)\}}, \quad E_\psi(z) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \psi(\,\mathrm{Im}(\gamma z)).$$

つまり $\mathcal{E}$ は所謂不完全 Eisenstein 級数の成す空間である．さらに $\mathcal{C}$ を $\mathcal{E}$ の直交補空間として定義する:

$$\mathcal{C} := L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H}) \ominus \mathcal{E}.$$

このとき, $\Delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$ から $\Delta(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ が従い, $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ のスペクトルは固有値のみから成る事が分かる．しかも Selberg 跡公式により, $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ の固有値 λ は, 完備 Selberg ゼータ関数 $\Xi_\Gamma(s) = \Xi_I(s) \cdot \Xi_{\mathrm{ell}}(s) \cdot \Xi_{\mathrm{par}}(s) \cdot \Xi_{\mathrm{hyp}}(s)$ の零点 $1/2 + ir$ と $\lambda = \frac{1}{4} + r^2$ により対応し, $(\Delta, \mathcal{C})$ が Selberg ゼータ関数に対する Hilbert-Pólya 予想を実現している. (いま $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ なので, $\lambda > 1/4$. 即ち $r \in \mathbb{R}$.)

ここで $(\Delta, \mathcal{C})$ は, $(\Delta, L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H}))$ という大きな空間の作用素から誘導されて来たものだという事を覚えておいて欲しい.

2.3. **Riemann ゼータ関数の場合.** 前世紀末, A. Connes [3] によって提案された Riemann ゼータ関数に対する Hibert-Pólya ペア (D, H) の構成は, 概ね Selberg ゼータ関数の場合の類似になっている．$f(x) \mapsto ixf'(x)$ から誘導される $L^2(\mathbb{R}_+^\times) = L^2((0, \infty), x^{-1}dx)$ 上の自己共役作用素を Δ とする:

$$\Delta : L^2(\mathbb{R}_+^\times) \to L^2(\mathbb{R}_+^\times).$$

ここで次の部分空間を考える:

$$\mathcal{E} := \overline{\{E_\psi \mid \psi \in S(\mathbb{R})^{\mathrm{even}}, \psi(0) = \hat{\psi}(0) = 0\,\}}, \quad E_\psi(z) = \frac{\sqrt{x}}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(nx).$$

ここで $S(\mathbb{R})^{\mathrm{even}}$ は $\mathbb{R}$ 上の Schwartz class を偶関数に制限したもの, $\psi \mapsto \hat{\psi}$ は $\mathbb{R}$ 上の Fourier 変換. そして $\mathcal{C}$ を $\mathcal{E}$ の直交補空間として定義する:

$$\mathcal{C} := L^2(\mathbb{R}_+^\times) \ominus \mathcal{E}.$$

この時, $\Delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$ から $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ が誘導され, そのスペクトルは固有値のみから成り, 固有値は Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の (臨界線上にある) 非自明零点の虚部と一致する. つまり, (RH の下では) この $(\Delta, \mathcal{C})$ が Riemann ゼータ関数に対する Hilbert-Pólya 予想を実現している．ここで Selberg の跡公式に対応するのは Weil の明示公式である.

2.4. **この稿での方針.** 厳密には前節の説明は嘘で, 閉包をとる事により $\mathcal{E} = L^2(\mathbb{R}_+^\times)$ となってしまうので, 実際には $\mathcal{C} = \{0\}$ である. また臨界線上の零点しか固有値として解釈されていないという点も問題である. ここで前項の $(\Delta, \mathcal{C})$ の構成を上手に修正して, これらの問題を回避できればベストなのだが, 現時点の修正案では色々な理論的/技術的困難が生じてしまう.

そこで, 我々はこれとは本質的に異なる方法で, Riemann ゼータ関数に対する Hibert-Pólya ペア (D, H) を構成する事を考える. 但し, Selberg, Connes の構成を参考にして, 次の様な方針を立てる: まず最初に, よく知られた Hilbert 空間 V とその上の作用素 A をとる. A は"自然に"定まる標準的なもので, 自己共役拡張を持つものを考える. この時, A 不変な V の"良い"部分空間 W で, A から誘導される $H = V \ominus W$ 上の作用素のある自己共役拡張 D が Riemann ゼータ関数の零点を固有値として持つものを探す.

つまりペア (D, H) そのものを探すのではなく, 期待されるペアを誘導するような三つ組 (A, V, W) を探すという方針である. 先の Selberg, Connes の構成は実際この形になっていて, 重要な情報は V の部分空間 W に凝縮されている.

この様な方針で三つ組 (A, V, W) を探すとすると, まず必要なのは Hilbert 空間 V の選択である. 今回, 我々は V として上半平面 $\mathbb{C}^+$ 上の Hardy 空間 $H^2(\mathbb{C}^+)$ を選択する. (2.2 節では上半平面を $\mathfrak{H}$ と表したが, 以後は上半平面を表すのに $\mathbb{C}^+$ を用いる.) この選択に至った動機は [10, 11] だが, これには立ち入らない. 次の章で Hardy 空間の理論の概略を説明し, 続いて今回の三つ組 (A, V, W) について解説する. その後, 講演で述べた主定理を述べ, 最後に古典的な結果との比較と, 若干のコメントを述べて稿を終える.

3. Hardy 空間の理論

3.1. **Hardy 空間.** Hardy 空間の一般論については例えば Hoffman [8] が良い. 上半平面 $\mathbb{C}^+$ 上の Hardy 空間 $H^2(\mathbb{C}^+)$ とは, $\mathbb{C}^+$ 上の正則関数 f で,

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{C}^+)}^2 := \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 \, dx < \infty$$

を満たすもの全体の成す Hilbert 空間である. 実軸上での境界値を経由して, $H^2(\mathbb{C}^+)$ は加法群 $\mathbb{R}$ 上の L^2 空間 $L^2(\mathbb{R})$ の部分空間と Hilbert 空間として同一視される:

$$H^2(\mathbb{R}) = \left\{ \lim_{y \to 0^+} f(x+iy) \;\middle|\; f \in H^2(\mathbb{C}^+) \right\} \subset L^2(\mathbb{R}).$$

さらに Paley-Wiener の定理により,

$$H^2(\mathbb{C}^+) = \left\{ F(z) = \int_0^\infty f(t)\, t^{iz} \, \frac{dt}{t} \;\middle|\; f \in L^2((1,\infty), \frac{dt}{t}) \right\}.$$

3.2. **内部関数.** $\mathbb{C}^+$ 上で定義された正則関数 $\Theta \in H^\infty(\mathbb{C}^+)$ (即ち $\sup_{z \in \mathbb{C}^+} |\Theta(z)| < \infty$) が内部関数であるとは, $|\Theta(z)| \le 1$ $(z \in \mathbb{C}^+)$ かつ $|\Theta(x)| = 1$ (a.e. $x \in \mathbb{R}$), であることを言う. さらに Θ が $\mathbb{C}$ 上の有理型関数であるとき, 有理型内部関数と呼ぶ.

いま Θ を内部関数とする. このとき

$$\Theta H^2(\mathbb{C}^+) := \{\Theta(z) F(z) \mid F \in H^2(\mathbb{C})\}$$

は $H^2(\mathbb{C})$ の部分空間である. $\Theta H^2(\mathbb{C}^+)$ の直交補空間を Θ から生成されるモデル (部分) 空間と呼ぶ:

$$K_\Theta := H^2(\mathbb{C}^+) \ominus \Theta H^2(\mathbb{C}^+).$$

例えば, $\Theta_a(z) = e^{2iaz}$ $(a > 0)$ のとき, モデル部分空間 K_Θ は所謂 Paley-Wiener 空間 $\mathrm{PW}_a = \{\hat{f} \mid f \in L^2(-a,a)\}$ ($f \mapsto \hat{f}$ は加法的 Fourier 変換) に一致する. 一般のモデル部分空間 K_Θ は Paley-Wiener 空間の一般化である.

Θ が有理型内部関数であるとき, モデル部分空間 K_Θ の元はみな $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続され, de Branges によって定義された整関数から成る Hilbert 空間 (de Branges Hilbert 空間) と同型になる [4]. この事実から, 有理型内部関数から生成されるモデル部分空間は, 一般のモデル部分空間より豊かな構造を持つ.

3.3. **掛け算作用素.** Hardy 空間 $H^2(\mathbb{C}^+)$ には半群 $\mathbb{R}_+^\times = (0,\infty)$ が

$$F(z) \ \mapsto \ e^{irz}F(z) \quad (r \in \mathbb{R}_+^\times)$$

によって作用しており, 掛け算作用素 $F(z) \mapsto izF(z)$ を生成作用素にもつ. 以下,

$$\mathsf{M}F(z) = zF(z)$$

と表す. 定義域は $\{F \in H^2(\mathbb{C}^+) \mid zF(z) \in H^2(\mathbb{C}^+)\}$. M は Fourier 変換により $L^2((1,\infty),\frac{dt}{t})$ 上の微分作用素 $\mathsf{D} = -it\frac{d}{dt}$ に対応する.

与えられた内部関数 Θ に対し, $\Theta H^2(\mathbb{C}^+)$ は常に $\mathbb{R}_+^\times$ 不変なので [2], M はモデル部分空間上の作用素 $\tilde{\mathsf{M}} : K_\Theta \to K_\Theta$ を誘導する. しかし, $\tilde{\mathsf{M}}$ の定義域は一般に稠密でなく, 自己共役でもない. ところが, Θ が有理型内部関数ならば, de Branges Hilbert 空間の理論を経由して, 作用素 $\tilde{\mathsf{M}}$ の定義域の閉包は高々余次元 1 で, $\tilde{\mathsf{M}}$ の定義域が稠密なら, $\tilde{\mathsf{M}}$ は $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq U(1)$ でパラメトライズされる自己共役拡張の族 $\{\tilde{\mathsf{M}}_\theta\}_\theta$ を持ち, 各 $\tilde{\mathsf{M}}_\theta$ の固有関数は K_Θ を張る事が知られている (de Branges, Krein).

3.4. **Hardy 空間での三つ組.** ここで 2.4 節で述べた動機に戻ると, 適当な有理型内部関数 Θ を選ぶことで三つ組

$$(A,V,W) = (\tilde{\mathsf{M}}_\theta,\ H^2(\mathbb{C}^+),\ \Theta H^2(\mathbb{C}^+))$$

から Rimenn ゼータ関数に対する Hibert-Pólya ペア (D,H) が導く事ができるか否かが問題となる. 結論から言うと, 少なくとも Riemann 予想 (RH) の成立を仮定すれば, これが可能である. これを次の章で解説する.

4. 内部関数と Riemann 予想

$\zeta(s)$ を Riemann ゼータ関数, $\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ とし,

$$E_\omega^{\mathrm{L}}(z) := \xi(1/2 - iz) + \omega\,\xi'(1/2 - iz),$$
$$E_\omega(z) := \xi(1/2 - iz + \omega),$$

[2]Beurling, Lax によれば, 逆に全ての $H^2(\mathbb{C}^+)$ の $\mathbb{R}_+$ 不変部分空間はこの形で与えられる.

とおく. さらに次のように定義する:

$$\Theta^{\mathrm{L}}_\omega(z) := \frac{\overline{E^{\mathrm{L}}_\omega(\bar z)}}{E^{\mathrm{L}}_\omega(z)} = \frac{\xi(1/2-iz)-\omega\,\xi'(1/2-iz)}{\xi(1/2-iz)+\omega\,\xi'(1/2-iz)},$$
$$\Theta_\omega(z) := \frac{\overline{E_\omega(\bar z)}}{E_\omega(z)} = \frac{\xi(1/2-iz-\omega)}{\xi(1/2-iz+\omega)}.$$

このとき次が成り立つ.

命題 1. Riemann ゼータ関数に対し RH が成り立つ事と, 次の何れかは同値:

(1) ある $\omega>0$ に対し, $\Theta^{\mathrm{L}}_\omega(z)$ は内部関数,
(2) 任意の $\omega>0$ に対し, $\Theta_\omega(z)$ は内部関数.

Proof. RH と (1) の同値性は本質的に [10, Theorem 1]. RH と (2) の同値性における必要性は [9, Theorem 2.1], 十分性は $\xi(s)$ の関数等式を用いて背理法で証明できる. □

定義から $\Theta^{\mathrm{L}}_\omega(z)$, $\Theta_\omega(z)$ が有理型である事は明らかだから, 命題 1 に有理型内部関数から生成されるモデル部分空間の一般論 (即ち, de Bragnes Hilbert 空間の一般論 [4]) を適用すると次の結果が得られる.

命題 2. RH の下, $\Theta=\Theta^{\mathrm{L}}_\omega$ $(\omega>0)$, $E(z)=E^{\mathrm{L}}_\omega(z)$ とする. このとき自己共役拡張 $\tilde{\mathsf{M}}_\theta : K_\Theta \to K_\Theta$ のスペクトルは固有値のみから成り, 固有値は

$$B_\theta(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{\pi i\theta}E(z) - e^{-\pi i\theta}\overline{E(\bar z)}\right)$$

の零点に一致する. 特に $\theta=1/2$ のとき $B_{1/2}(z)=\xi(1/2-iz)$ なので, $\tilde{\mathsf{M}}_{1/2} : K_\Theta \to K_\Theta$ の固有値は Riemann ゼータ関数の非自明零点の虚部に一致する. また, $\Theta=\Theta_\omega$ とすると $\xi(s+\omega)+\xi(s-\omega)$ の零点について同様の結論を得る.

したがって RH の下で, 3.4 節の三つ組から Riemann ゼータ関数, またはその線形結合 $\xi(s+\omega)+\xi(s-\omega)$ $(\omega>0)$ に対する Hibert-Pólya ペア (D,H) が導かれる事が分かった. これは Connes [3] が構成したものとは異なる三つ組になっている.

とは言え, この構成で本質的なのは $\Theta^{\mathrm{L}}_\omega$ や Θ_ω が内部関数になっている事で, 命題 1 によればこれは RH と同値な条件である. このように空間の構成自体に RH を用いねばならないのは嬉しくない. そこで, 有理関数 Θ が $\mathbb{C}^+$ の内部関数である事という条件について, 更に考察を加えてみる.

有理型内部関数 Θ について, 一般論から関数

$$\frac{1}{z}\left(1-\Theta(z)\right)$$

はモデル部分空間 K_Θ に属す事が分かる (Θ が有理型であることが本質的). したがって特に, これはある $L^2((1,\infty),\frac{dt}{t})$ の元の (乗法的) フーリエ変換である.

$\Theta=\Theta_\omega$ とすると, $(1-\Theta_\omega)/z$ の原像は具体的な級数で書き下せて, Θ_ω が内部関数である必要十分条件を, その級数の言葉で述べる事ができる. 任意の $\omega>0$ について Θ_ω が内部関数である事は RH と同値であったから, それは一つの RH の同値条件を与えるものになる. これを次の章で述べよう.

5. Riemann 予想の一つの同値条件

各 $\omega > 0$ に対し, 実数列 $c_\omega(n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を

$$c_\omega(n) := n^\omega \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d^{2\omega}}$$

で定義する. ここで $\mu(n)$ は Möbius 関数. このとき

$$\frac{\zeta(s-\omega)}{\zeta(s+\omega)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_\omega(n)}{n^s} \quad (\Re(s) > 1 + \omega)$$

であって, 任意の $n \geq 1$ について

$$c_\omega(n) \geq 0$$

である. この非負性は Euler 積から簡単に出る. さらに

$$\gamma(s) := s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$$

として, 関数 $f_\omega(y)$ $(\omega > 0)$ を次の Mellin 逆変換により定義する:

$$f_\omega(y) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(s)=c} \frac{2}{2s-1} \frac{\gamma(s-\omega)}{\gamma(s+\omega)} \, y^{-s} \, ds \quad (c \gg 0).$$

このとき $f_\omega(y)$ は実数値で, $y \in (1, \infty)$ において $f_\omega(y) \equiv 0$ であり, $y \in (0, 1)$ において

$$f_\omega(y) = \frac{\pi^\omega}{\Gamma(\omega)} \frac{2}{2\omega - 1} \left\{ 2\omega \, y^{\omega-1} \left[B\left(\frac{3-2\omega}{2}, \omega\right) - B\left(y^2, \frac{3-2\omega}{2}, \omega\right) \right] \right.$$
$$\left. - \frac{2\omega+1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \left[B\left(\frac{5-2\omega}{4}, \omega\right) - B\left(y^2, \frac{5-2\omega}{4}, \omega\right) \right] \right\}.$$

と書き下せる ($\omega = 1/2$ の時は極限の意味). ここで $B(z, \alpha, \beta)$ は不完全ベータ関数:

$$B(z, \alpha, \beta) = \int_0^z t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \, dt.$$

この表示は Mellin 変換の公式

$$\frac{\Gamma(s+\alpha)}{\Gamma(s+\beta)} = \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} \, x^\alpha (1-x)^{\beta-\alpha-1} \, x^s \, \frac{dx}{x} \quad (\Re(s) > -\Re(\alpha), \ \Re(\beta - \alpha) > 0)$$

([13, p.195 (5.35)]) などを用いて計算される. また $f_\omega(y)$ は区間 $(0, 1)$ 内で唯一つの零点 y_ω ($\to 0^+$ $(\omega \to 0^+)$) を持ち, $y_\omega < y < 1$ において $f_\omega(y) > 0$ であり, $(0, 1)$ の各コンパクト部分集合上で一様に $\sqrt{y}\, f_\omega(y) \to 1$ $(\omega \to 0^+)$. 例えば $\omega = 0.05$ の時, $y_\omega = 0.022037\cdots$ であり, $\sqrt{y}\, f_\omega(y)$ のグラフは図 1 のようになる.

最後に, 各 $\omega > 0$ に対して,

$$F_\omega(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} c_\omega(n) \cdot f_\omega\left(\frac{n}{x}\right)$$

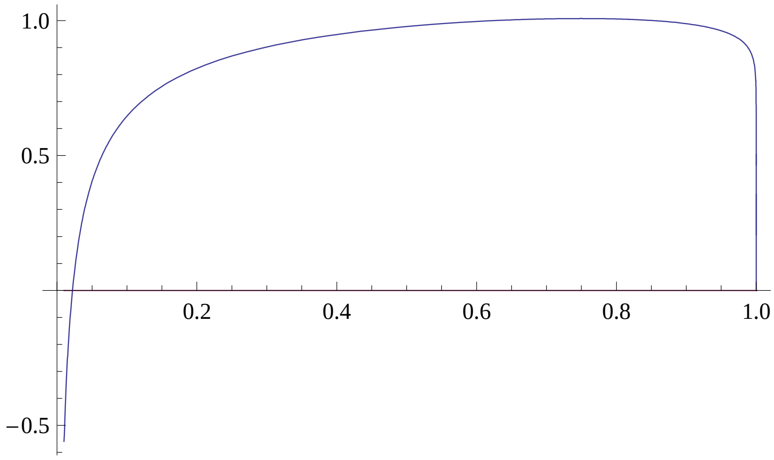

FIGURE 1. $\omega = 0.05$ のときの区間 $(0, 1)$ における $\sqrt{y}\, f_\omega(y)$ のグラフ.

と定義する. $f_\omega(x)$ の台が $[0, 1]$ であることから, 各 $x > 0$ に対して右辺の和は有限和 $(1 \le n \le x)$ である. また F_ω が $[1, \infty)$ に台を持つ連続関数であることも簡単に分かる. しかも $\Im(z) > 1/2 + \omega$ において

$$\int_0^\infty F_\omega(x)\, x^{iz} \frac{dx}{x} = \frac{i}{z}\, \Theta_\omega(z) = \frac{2}{2s-1} \frac{\xi(s-\omega)}{\xi(s+\omega)}$$

$(s = 1/2 - iz)$ が成り立つ.

この表示からも分かるように, $\mathbf{1}_{(1,\infty)}(x) - F_\omega(x)$ が期待される $\frac{i}{z}(1 - \Theta_\omega(z))$ の Fourier 逆変換なので, これは $L^2((1, \infty), \frac{dx}{x})$ に属すはずである. しかしこれを直接示そうとすると, $\mathbf{1}_{(1,\infty)}(x) - F_\omega(x)$ の $x \to \infty$ における増大度の評価が RH と直結しているため難しい (自明な評価は $O(x^{1/2+\omega+\varepsilon})$). ここで, ある $A_\omega > 0$ について『各 $\omega > 0$ に対して $\mathbf{1}_{(1,\infty)}(x) - F_\omega(x) = O(x^{-A_\omega})$ $(x \to \infty)$ が成り立つ事と RH は同値である』というタイプの同値条件を考える事もできるが, これはありふれたタイプの同値条件であまり面白くない (と筆者には思える).

しかしながら, 我々が知りたかったのは Θ_ω が内部関数であるか否かといった事であった. これに対しては $\mathbf{1}_{(1,\infty)}(x) - F_\omega(x)$ の L^2 性の問題は (見かけ上) 回避でき, 次のような同値条件が成り立つ事が分かる.

定理 1. 与えられた $\omega_0 \ge 0$ について, 次は互いに同値*:*

(1) $\Re(s) > 1/2 + \omega_0$ において $\zeta(s) \ne 0$,
(2) 各 $\omega > \omega_0$ に対し, $\Theta_\omega(z)$ は内部関数,
(3) 各 $\omega > \omega_0$ に対し, ある $x_\omega \ge 1$ が存在して, $F_\omega(x) \ge 0$ *for* $x \ge x_\omega$.

特に $\omega_0 = 0$ とすれば, (2), (3) は RH と同値である.

先に述べた $c_\omega(n)$, $f_\omega(x)$ の性質から, $F_\omega(x)$ の値は $1 < x < y_\omega^{-1}$ で非負でなくてはならないから, 興味があるのは $x > y_\omega^{-1}$ における値である. 例えば $\omega = 0.05$ の時, $y_\omega^{-1} = 45.3780\ldots$ で, $1 \le x \le 1000$ における $F_\omega(x)$ のグラフは図 2 のようになる.

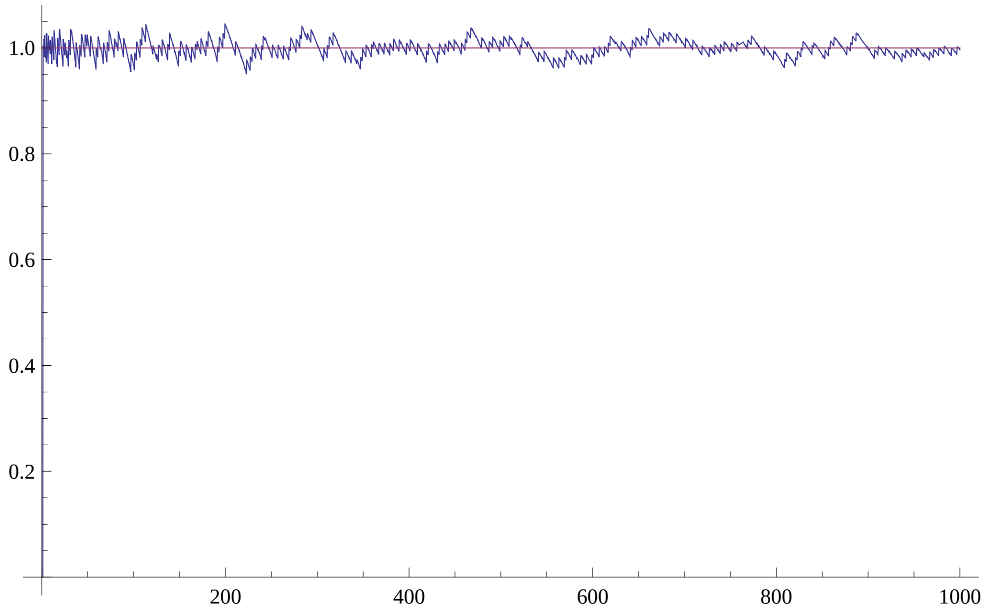

FIGURE 2. $\omega = 0.05$ のときの区間 $(1, 1000)$ における $F_\omega(x)$ のグラフ.

$\omega_0 = 0$ ならば (1) と (2) の同値性は命題 1 の (2) だが, $\omega_0 > 0$ の場合もこれと同様の議論で証明される. また (1) と (3) の同値性は Hardy 空間の理論を経由せずに, 直接証明できる. 概略は次の通りである. (1)⇒(3) は Mellin 逆変換から得られる

$$F_\omega(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=c} \frac{2}{2s-1}\frac{\xi(s-\omega)}{\xi(s+\omega)} x^{s-1/2}\, ds \quad (c \gg 0)$$

の積分路を左へ移動する事により $F_\omega(x) = 1 + o_\omega(1)$ $(x \to \infty)$ である事から従う. 逆の (3)⇒(1) であるが, まず

$$\int_0^\infty e^{t/2}\, F_\omega(e^t) \cdot e^{-st}\, dt = \frac{2}{2s-1}\frac{\xi(s-\omega)}{\xi(s+\omega)}$$

に Landau の定理を適用すると, 仮定 (3) と $\xi(s)$ が実軸上に零点を持たない事から, 右辺の $\xi(s-\omega)/\xi(s+\omega)$ が $\Re(s) > 1/2$ で正則である事が従う. これから, ある $\Re(\rho) > 1/2$ に対して $\xi(\rho+\omega) = 0$ ならば, 関数等式から $\xi(\rho-\omega) = \xi(1-\rho+\omega) = 0$ である. もし $\xi(s)$ が $\Re(s) > 1/2 + \omega_0$ で零点を持つと仮定すると, 簡単な議論によって, このような零点の余分な対称性が任意の $\omega > \omega_0$ に対して存在する事から矛盾が出て, (3)⇒(1) の証明が完結する.

命題 1 を思い出すと, $\Theta = \Theta_\omega^{\mathrm{L}}$ に対しても同様の議論ができないかが気になる所である. つまり, ある $\omega > 0$ に対して $\Theta_\omega^{\mathrm{L}}$ が内部関数である事を, 何らかの具体的関数の漸近的な非負性として述べる事ができないだろうかという問題である. これは F_ω の $\Theta_\omega^{\mathrm{L}}$ に対する類似物 F_ω^{L} を, $(1-\Theta_\omega^{\mathrm{L}}(z))/z$ の Fourier 逆変換などを用いて定義すれば可能ではある. しかし Θ_ω の場合と異なり, $(1-\Theta_\omega^{\mathrm{L}}(z))/z$ の Fourier 逆変換を明示的に計算する事が技術的に難しく, F_ω^{L} が既知の関数でどのように表示されるのかはよく分からな

い. これは Θ_ω がガンマ関数の比と Dirichlet 級数の積として, 無限素点部分と有限素点部分に分解されるのに対し, $\Theta_\omega^{\mathrm{L}}$ ではその様な分解が不明だからである. この為, F_ω でやったように, $\Theta_\omega^{\mathrm{L}}$ を隠した状態で F_ω^{L} を定義することが出来ないので, 同値条件としては大分興味が薄れた形になってしまう.

しかも, $\Theta_\omega^{\mathrm{L}}$ を扱う事は, Θ_ω に比べて本質的に困難な事を予測させる事実がある. 固定された z に対しては, $\omega \to 0$ のとき

$$\Theta_\omega(z) = \frac{\xi(1/2 - iz) - \omega\,\xi'(1/2 - iz) + O_z(\omega^2)}{\xi(1/2 - iz) + \omega\,\xi'(1/2 - iz) + O_z(\omega^2)} \;\approx\; \Theta_\omega^{\mathrm{L}}(z)$$

だから, $\omega > 0$ が小さい時には Θ_ω と $\Theta_\omega^{\mathrm{L}}$ は似た挙動を示すと期待する事もできる. しかしながら, 固有値解釈で対応する関数は $\Theta_\omega^{\mathrm{L}}(z)$ では $\xi(s)$, $\Theta_\omega(z)$ では $\xi(s+\omega)+\xi(s-\omega)$ であり, RH の下で $\xi(s)$ の零点の虚部の分布は適当な正規化の下で GUE (Gaussian unitary ensemble) に従うと予想されるのに対し, $\xi(s+\omega)+\xi(s-\omega)$ の零点の虚部の分布は同様の正規化の下で一様分布である ([9, Theorem 4.1]). したがって見た目の類似性以上に, Θ_ω と $\Theta_\omega^{\mathrm{L}}$ の差異は大きい可能性がある. 実際のところどうなのかは現時点では不明であるが.

6. 古典的結果との比較

最後に定理 1 との比較として, ある級数の非負性と RH を結び付ける予想の中で有名なものを挙げておく. 但し, 我々の $F_\omega(x)$ との対比のため, 若干通常とは違った記法で述べてある事に注意して欲しい.

Liouville 関数 $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ と $f(y) = 1\,(0 < y \le 1), = 0\,(y > 1)$ に対して,

$$L(x) := -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) \cdot f\left(\frac{n}{x}\right), \qquad T(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n} \cdot f\left(\frac{n}{x}\right)$$

と定義する. Pólya (resp. Turán) は十分大きな $x > 0$ に対して $L(x) \ge 0$ (resp. $T(x) \ge 0$) である事を予想した. この予想はどちらも RH の十分条件になっているが, 必要条件にはなっていない. 実際, これらの予想は Haselgrove [6] により否定された. しかしながら, $f(y)$ をより滑らかな関数で置き換える事により, 同値な条件に修正する事は難しくない.

一方, $\varpi(n)$ は n が奇素数のとき 1, その他で 0 の値をとるものとし, $f(y) = \exp(-y)$ として

$$P(x) := -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \varpi(n) \cdot f\left(\frac{n}{x}\right)$$

と定義する. Chebyshev [2] は 1853 年, 十分大きな $x > 0$ について $P(x) > 0$ である事を証明無しに主張した. その後, Chebyshev の主張は mod 4 の非自明な原始的指標 χ_4 に付随する Dirichlet L 関数 $L(s, \chi_4)$ に対して GRH が成立する事と同値な事が Hardy-Littlewood (1917), Landau (1918) により独立に証明された.

これらの予想では RH と級数の非負性を直接結びつけているのに対し, 定理 1 はパラメータ $\omega > 0$ を導入して, 非零領域の段階的な拡大と級数の族の非負性を結びつけているという点が異なる. (このようなタイプの主張として, 状況はだいぶ異なるが, 所謂

Li の criterion に関する Brown [1] の結果がある.) もし F_ω^{L} に対して F_ω と類似の表示が得られれば, それは上記の $L(x)$, $T(x)$, $P(x)$ に対する予想 (またはその修正), の直接の類似となるが, 前章の最後で述べたような事情もあるので, その様な主張が可能であるかは明らかではない.

これらの古典的な予想と定理 1 との最も大きな違いは, F_ω の非負性にはモデル空間 K_{Θ_ω} という関数解析的な背景が存在する事である. これによって K_{Θ_ω} の構造を経由して, 定理 1 の同値条件を関数解析的な言葉で更に言い換えていく事が可能になる. この結果は現在準備中の別稿で扱う予定である.

References

1. Francis C. S. Brown, *Li's criterion and zero-free regions of L-functions*, J. Number Theory **111** (2005), no. 1, 1–32. MR 2124041 (2005k:11179)
2. Pafnuty L. Chebyshev, *Oeuvres de p. l. tchebychef i*, Chelsea Publ., 1962.
3. Alain Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), no. 1, 29–106. MR 1694895 (2000i:11133)
4. Louis de Branges, *Hilbert spaces of entire functions*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968. MR MR0229011 (37 #4590)
5. Jürgen Fischer, *An approach to the Selberg trace formula via the Selberg zeta-function*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1253, Springer-Verlag, Berlin, 1987. MR 892317 (88f:11053)
6. Colin B. Haselgrove, *A disproof of a conjecture of Pólya*, Mathematika **5** (1958), 141–145. MR 0104638 (21 #3391)
7. Dennis A. Hejhal, *The Selberg trace formula for* PSL(2, **R**). *Vol. 2*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1001, Springer-Verlag, Berlin, 1983. MR 711197 (86e:11040)
8. Kenneth Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Dover Publications Inc., New York, 1988, Reprint of the 1962 original. MR 1102893 (92d:46066)
9. Jeffrey C. Lagarias, *Zero spacing distributions for differenced L-functions*, Acta Arith. **120** (2005), no. 2, 159–184. MR MR2187786 (2007c:11097)
10. ———, *Hilbert spaces of entire functions and Dirichlet L-functions*, Frontiers in number theory, physics, and geometry. I, Springer, Berlin, 2006, pp. 365–377. MR MR2261101 (2007g:11105)
11. Jeffrey C. Lagarias and Masatoshi Suzuki, *The Riemann hypothesis for certain integrals of Eisenstein series*, J. Number Theory **118** (2006), no. 1, 98–122. MR 2220265 (2007c:11099)
12. Hugh L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function*, Analytic number theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV, St. Louis Univ., St. Louis, Mo., 1972), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973, pp. 181–193. MR 0337821 (49 #2590)
13. Fritz Oberhettinger, *Tables of Mellin transforms*, Springer-Verlag, New York, 1974. MR 0352890 (50 #5376)
14. Andrew M. Odlyzko, *On the distribution of spacings between zeros of the zeta function*, Math. Comp. **48** (1987), no. 177, 273–308. MR 866115 (88d:11082)
15. Zeév Rudnick and Peter Sarnak, *Zeros of principal L-functions and random matrix theory*, Duke Math. J. **81** (1996), no. 2, 269–322, A celebration of John F. Nash, Jr. MR 1395406 (97f:11074)
16. Atle Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **20** (1956), 47–87. MR 0088511 (19,531g)