On the Riemann hypothesis for a zeta function of rank 3

立教大学 理学部 数学科　鈴木正俊 (Suzuki Masatosi) [1]
Department of Mathematics
Rikkyo University

1. 導入：Weng zeta functions

代数体 K の Dedekind ゼータ関数を $\zeta_K(s)$, それにガンマ因子を補って完備化したものを $\widehat{\zeta}_K(s)$ で表す．代数体 K が有理数体 $\mathbb{Q}$ のとき, $\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$ は Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ である．また $\widehat{\zeta}_{\mathbb{Q}}(s)$ を $\widehat{\zeta}(s)$ と表すものとすれば

$$\widehat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s). \tag{1.1}$$

ここで $\Gamma(s)$ はガンマ関数である．Dedekind ゼータ関数や Riemann ゼータ関数の定義や基本的な性質については既知とする．

現在では Dedekind ゼータ関数 $\widehat{\zeta}_K(s)$ は保型表現のゼータ関数の一つと見なされる事が多い．それは Riemann による関数等式の第 2 証明の Hecke による拡張に端を発している．一方, L. Weng は [?] において, Dedekind ゼータ関数をこれとは全く違う見方から拡張した．これは代数体と有限体上の代数函数体の類似と, 代数曲線のゼータ関数の幾何的表示が元となっている．今回我々が扱うのは Weng による Dedekind ゼータ関数の拡張である．

C を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の非特異完備代数曲線とする．代数曲線 C に付随するゼータ関数 $\zeta_C(s)$ が次の表示を持つことはよく知られている:

$$\zeta_C(s) = \sum_{[L]\in \mathrm{Pic}(C)} \frac{q^{h^0([L])}-1}{q-1}\, q^{-s\deg([L])}. \tag{1.2}$$

ここで $\mathrm{Pic}(C)$ は C 上の直線束の同型類全体, $[L]$ は直線束 L の同型類,

$$h^0([L]) := h^0(L) = \dim_{\mathbb{F}_q} H^0(C,L), \tag{1.3}$$

$\deg([L]) = \deg(L) = L$ の次数, である．

代数体と代数曲線 C の函数体（＝代数函数体）の類似は Arakelov 幾何の導入によってより明確な形で得られる．特に Dedekind ゼータ関数に対して (**??**) と同様の幾何的表示を得る事ができる．有理数体 $\mathbb{Q}$ の場合, それは以下の通りである．

• **van der Geer & Schoof (2000)**

$$\widehat{\zeta}(s) = \int_{\mathrm{Pic}(\mathbb{Q})} (e^{h^0([\widehat{L}])}-1)\, e^{-s\cdot\deg([\widehat{L}])} d\mu(\widehat{[L]}), \tag{1.4}$$

ここで $\mathrm{Pic}(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{R}_{>0}$ は階数 1 の距離付き $\mathbb{Z}$ 加群の同型類全体で, これが $\mathrm{Pic}(C)$ の類似物である．階数 r の距離付き $\mathbb{Z}$ 加群とは階数 r の $\mathbb{Z}$ 加群 L と $L\otimes\mathbb{R}$ 上の Hermite 距

[1] 学振特別研究員 PD

離 $\| \ \|$ の組 $\widehat{L} = (L, \| \ \|)$ で, 階数 1 の距離付き $\mathbb{Z}$ 加群が C 上の直線束の類似物である. また階数 1 の距離付き $\mathbb{Z}$ 加群 $\widehat{L} = (L, \| \ \|)$ に対して $h^0(\widehat{L})$ は

$$h^0(\widehat{L}) := \log\Big(\sum_{x\in L} \exp(-\pi\|x\|^2)\Big) \tag{1.5}$$

で定義され, $\widehat{L}$ の同型類 $[\widehat{L}]$ に対して $h^0([\widehat{L}]) = h^0(\widehat{L})$.

ここで (**??**) の表示に戻る. 代数曲線 C のゼータ関数は C 上の直線束の同型類全体を渡る和で表示できた. では直線束の部分をベクトル束に一般化したらどうであろうか. これが Weng のアイディアの一つである. しかし階数 r を固定して階数 r のベクトル束全体を考えても全ての $s \in \mathbb{C}$ で和が発散してしまいうまくゆかない. そこで代数幾何の moduli 理論に倣って, 和を半安定なベクトル束に制限すると和は $\Re(s)$ が十分大きいところで絶対収束することが分かる. これが Weng の 2 つ目のアイディアである. 更に Riemann–Roch の定理を用いる事により解析接続や関数等式が得られる. このようにして得られた $\zeta_C(s)$ の拡張について, Arakelov 幾何の視点から代数体での類似を考えると Dedekind ゼータ関数の一般化が得られる. これが今回我々が扱う対象である. 有理数体の場合, それは次で与えられる.

- **Weng ([?])** 固定された整数 $r \geq 1$ に対し, 関数 $\widehat{\zeta}_r(s)$ を

$$\widehat{\zeta}_r(s) := \int_{M_{\mathbb{Q},r}} (e^{h^0([\widehat{E}])} - 1)\, e^{-s\cdot\deg([\widehat{E}])} d\mu([\widehat{E}]) \tag{1.6}$$

で定義する. ここで $M_{\mathbb{Q},r}$ は階数 r の半安定な距離付き $\mathbb{Z}$ 加群 $\widehat{E} = (E, \| \ \|)$ の同型類全体. Sheaf cohomology の "次元" $h^0(\widehat{E})$ は

$$h^0(\widehat{E}) := \log\Big(\sum_{x\in E} \exp(-\pi\|x\|^2)\Big) \tag{1.7}$$

で定義され, $\widehat{E}$ の同型類 $[\widehat{E}]$ に対して $h^0([\widehat{E}]) = h^0(\widehat{E})$.

このように定義された $\widehat{\zeta}_r(s)$ に対して Weng は次のことを示した.

(W0) 階数 1 の全ての距離付き $\mathbb{Z}$ 加群は半安定で, $\widehat{\zeta}_1(s) = \widehat{\zeta}(s)$,

(W1) $\widehat{\zeta}_r(s)$ を定義する積分は $\Re(s) > 1$ で絶対収束する,

(W2) $\widehat{\zeta}_r(s)$ は $s = 0, 1$ を除いて $\mathbb{C}$ へ正則に解析接続される,

(W3) $\widehat{\zeta}_r(s)$ は関数等式 $\widehat{\zeta}_r(s) = \widehat{\zeta}_r(1-s)$ を満たす,

(W4) $s = 1$ は一位の極で, $\operatorname*{Res}_{s=1} \widehat{\zeta}_r(s) = \mathrm{vol}(M_{\mathbb{Q},r}[1])$.

これらから $\widehat{\zeta}_r(s)$ は Riemann ゼータ関数の持つ良い解析的性質の幾つかを受け継いでいることが分かる. 一般の代数体 K に対しても $\widehat{\zeta}_{K,r}(s)$ が定義され, 同様の結果が得られる [?].

2. 主結果

前節の $\widehat{\zeta}_r(s)$ の性質 (W3) から次の Riemann 予想の類似が考えられる.

RH(r) : $\widehat{\zeta}_r(s)$ の全ての零点は垂直線 $\Re(s) = 1/2$ 上にある.

$r=1$ の場合, $\widehat{\zeta}_r(s)$ は Riemann ゼータ関数であるから, RH(1) は通常の Riemann 予想である. 従って $\mathbf{RH}(r)$ $(r \geq 2)$ に対して何か分かれば, Riemann 予想に関するヒントが得られないかという期待が起る. $r \geq 2$ の場合, $\mathbf{RH}(r)$ は $\widehat{\zeta}_r(s)$ の定義からは RH(1) より複雑そうに見えるのだが, 意外な事に次の結果が得られる.

• **Lagarias & Suzuki** [?] : $\mathbf{RH}(2)$ は正しい.

注 1. この結果は Weng により一般の代数体の場合に拡張されている [?]. K が虚 2 次体の場合については T. Hayashi [?] も同様の結果を得ている.

注 2. RH(2) については H. Ki も独立に結果を出しており, 彼は RH(2) が正しい事に加えて, $\widehat{\zeta}_2(s)$ の $\Re(s)=1/2$ 上の零点は全て単純であることも示している [?].

今回, 有理数体の場合に対して次の結果が得られた.

定理 1. $\mathbf{RH}(3)$ は正しい. 即ち $\widehat{\zeta}_3(s)$ の全ての零点は垂直線 $\Re(s)=1/2$ 上にある.

注 3. 最近 O. Velásquez は彼の学位論文 [?] で $\zeta_3(s)$ の $\Re(s)=1/2$ 上の零点は全て単純であることを示した.

さて, ここで

$$\xi(s) = s(s-1)\,\widehat{\zeta}(s) \quad (\text{Riemann の } \xi\text{-関数}), \tag{2.1}$$

$$\xi_3(s) = 3s(3s-1)(3s-2)(3s-3)\,\widehat{\zeta}_3(s) \tag{2.2}$$

とおき,

$$\xi_3^{\natural}(s) := \xi_3(s) - \frac{\pi-3}{2}\,\xi(3s-1) \tag{2.3}$$

と定義する. このとき次が成り立つ.

定理 2. $\xi_3^{\natural}(s)$ の全ての零点は垂直線 $\Re(s)=1/2$ 上にある.

定理 1 と定理 2 を組み合わせると次の系が得られる.

系 1. Riemann の ξ-関数 $\xi(s)$ は, 全ての零点が垂直線 $\Re(s)=1/2$ 上にある二つの整関数の差として表せる. 実際,

$$\xi(3s-1) = \frac{2}{\pi-3}\Big(\,\xi_3(s) - \xi_3^{\natural}(s)\Big).$$

ここで $s=\frac{1}{2}+it$ と変数変換すれば,

$$\xi\Big(\frac{1}{2}+3it\Big) = \frac{2}{\pi-3}\Big(\xi_3\Big(\frac{1}{2}+it\Big) - \xi_3^{\natural}\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\Big).$$

3. 証明の概略

この節で [?] の $\mathbf{RH}(3)$ の証明の概略を解説する. 筆者と Lagarias が [?] で行った $\mathbf{RH}(2)$ の証明は Weng [?] による $\widehat{\zeta}_2(s)$ の明示的表示

$$\xi_2(s) = 2s(2s-1)(2s-2)\widehat{\zeta}_2(s) = \xi(2s) - \xi(2s-1) \tag{3.1}$$

を利用している. 今回の $\mathbf{RH}(3)$ の証明も次の結果がスタート地点である.

命題 1 (Weng [?])**.** $\xi_3(s)$ を (**??**) の通りとする. このとき

$$\begin{aligned}\xi_3(s) = {} & \frac{\xi(2)}{2}(3s-2)\xi(3s) + \frac{\xi(2)}{2}(1-3s)\xi(3s-2) \\ & + \xi(3s-1) + \frac{3}{2}\, s\,\xi(3s-2) + \frac{3}{2}(1-s)\xi(3s).\end{aligned} \tag{3.2}$$

これから

$$h(s) = \Big\{ \frac{3}{2}\Big(\xi(2)-1\Big)s - \Big(\xi(2) - \frac{3}{2}\Big) \Big\}\,\xi(3s), \tag{3.3}$$

$$X(s) = h(s) + h((2/3)-s) \tag{3.4}$$

とおくと,

$$\xi_3(s) = X(s) + X(1-s) + \frac{\pi-3}{2}\xi(3s-1), \tag{3.5}$$

$$\xi_3^{\natural}(s) = X(s) + X(1-s) \tag{3.6}$$

と表示できる. 定理 2 は (**??**) の表示と次の補題から容易に証明される.

補題 1. $F(s)$ は種数が 0 か 1 の整関数で, 次の 2 つの条件を満たすと仮定する*:*

(i) $F(s)$ は実軸上で実数値をとる,

(ii) ある正数 $a>0$ が存在して, $F(s)$ の全ての零点は垂直帯領域

$$|\Re(s) - 1/2| < a \tag{3.7}$$

の内部にある.

(iii) 正負いずれかの符合に対して関数等式

$$F(s) = \pm F(1-s), \tag{3.8}$$

を満たす.

このとき任意の正数 $c \ge a$ に対して,

$$\left|\frac{F(s-c)}{F(s+c)}\right| < 1 \quad \Big(\Re(s) > 1/2\Big), \qquad \left|\frac{F(s-c)}{F(s+c)}\right| > 1 \quad \Big(\Re(s) < 1/2\Big), \tag{3.9}$$

が成り立つ. 特に $F(s+c) \pm F(s-c)$ の全ての零点は垂直線 $\Re(s) = 1/2$ 上にある.

(定理 2 の証明の概略)

Step 1. Riemann ゼータ関数の関数等式と $\Re(s) > 1$ で零点を持たない事から, 補題 1 が $F(s) = h(s-(1/6))$ に対して適用できる ($a = 1/6$). このとき $c = 1/6$ と取ると $X(s)$ の零点は全て垂直線 $\Re(s) = 1/3$ 上にある事が分かる.

Step 2. Step 1 の結果から $F(s) = X(s-(1/6))$ に対して補題 1 が再び適用できる ($a = 1/6$). このとき $c = 1/6$ と取ると $\xi_3^{\natural}(s)$ の零点は全て垂直線 $\Re(s) = 1/2$ 上にある事が分かる. $\square$

（定理 1 の証明の概略）

定理 1 の証明は定理 2 の証明を若干修正する事により成される. いま

$$Y(s) = X(s) + \frac{\pi-3}{4}\xi(3s-1) \tag{3.10}$$

とおく. このとき $\xi(s)$ の関数等式から

$$\xi_3(s) = Y(s) + Y(1-s). \tag{3.11}$$

この様に表示すると $\xi_3(s)$ と $\xi_3^{\natural}(s)$ の類似性は明らかだが, $Y(s)$ では $((\pi-3)/4)\xi(3s-1)$ という項の存在により, $X(s)$ の場合のように補題 1 を適用する事はできない. しかし補題 1 の証明を修正する事により, 定理 2 の証明の Step 1 にあたる次が示される.

補題 2. $Y(s)$ の全ての零点は帯領域 $1/3 \le \Re(s) < 1/2$ にある.

この結果と補題 1 を用いて定理 2 の Step 2 と同様の議論を行いたいところであるが, 再び $((\pi-3)/4)\xi(3s-1)$ の存在により補題 1 は適用できない. ここで補題 1 を修正した次の補題を用意する.

補題 3. $F(s)$ は種数が 0 か 1 の整関数で, 次の 4 つの条件を満たすと仮定する:

(i) $F(s)$ は実軸上で実数値をとる,

(ii) ある実数 $\sigma_0 < 1/2$ が存在して, $F(s)$ の全ての零点は垂直帯領域

$$\sigma_0 < \Re(s) < 1/2, \tag{3.12}$$

の内部にある.

(iii) ある正数 $C > 0$ が存在して

$$N(T) \le CT\log T \quad (T \to \infty), \tag{3.13}$$

が成り立つ. ここで $N(T)$ は $\sigma_0 < \Re(\rho) < 1/2$ と $0 \le \Im(\rho) < T$ を満たす $F(s)$ の零点の重複度を込めた個数を表す.

(iv) 十分大きな $\sigma > 1/2$ に対して $F(1-\sigma)/F(\sigma) > 0$ であって,

$$\frac{F(1-\sigma)}{F(\sigma)} \to 0 \quad (\sigma \to \infty). \tag{3.14}$$

このとき

$$\left|\frac{F(1-s)}{F(s)}\right| < 1 \quad \big(\Re(s) > 1/2\big), \qquad \left|\frac{F(1-s)}{F(s)}\right| > 1 \quad \big(\Re(s) < 1/2\big). \tag{3.15}$$

特に $F(s) \pm F(1-s)$ の全ての零点は $\Re(s) = 1/2$ 上にある.

$F(s)=Y(s)$ とすると, これは補題 3 (i) の条件を満たし, 補題 2 から補題 3 (ii) の条件も満たす. 整関数の零点の個数に関する Jensen の公式から, $F(s)$ が補題 3 (iii) の条件も満たす事が分かる. Stirling の公式から $F(s)$ が補題 3 (iv) の条件も満たす事が分かり, 従って補題 3 により $\xi_3(s)=Y(s)+Y(1-s)$ の零点は全て垂直線 $\Re(s)=1/2$ 上にある事が分かる. この様にして定理 1 は証明される. □

4. 蛇足

RH(2) は補題 1 を $F(s)=\xi(2s-(1/2))$ に対して適用するだけで得られる. 前節でみた **RH**(3) の証明も, アイディアは補題 1 を繰り返し用いるという事につきる. では $r>3$ の場合の **RH**(r) も基本的には補題 1 を繰り返し用いる事で得られるのではないか, という安直な発想も湧くのだが, これを実行する事は今の所難しい. その原因の一つは $\widehat{\zeta}_r(s)$ の明示的な表示が r が大きくなるほど困難である事, もう一つは $r=2,3$ のとき $\zeta_r(s)$ に補題 1 が (繰り返し) 適用できる事の幾何的背景または数論的背景が不明瞭な事である. 現在の状態では $r=2,3$ の場合に $\zeta_r(s)$ を計算してみたらたまたま都合の良い形をしていたという以上の理解は得られていない. 従って $r>3$ の場合に関する話は一先ずおいておいて, ここでは補題 1, 補題 3 について若干の補足を加えることにする.

補題 1 や補題 3 は次の補題 4 の延長線上にあると考えられる.

補題 4. $P(z)$ は実軸上で実数値をとる多項式で, 全ての根は単位円の外部にあるものとする. このとき任意に固定された $m\geq \deg P$ を満たす正整数 m について, 多項式 $Q(z)=P(z)\pm z^m P(1/z)$ の根は全て単位円周上にある. 但し $Q(z)$ が定数である場合は除く.

Proof. まず $R(z)=z^m P(1/z)/P(z)$ とおく. このとき

$$Q(z)=P(z)(1+R(z)). \tag{4.1}$$

仮定より $R(z)$ は単位円内部と単位円周上で正則である. $P(z)$ が実軸上で実数値をとる事から, 単位円周上で $P(1/z)=\overline{P(z)}$. 従って単位円周上で $|R(z)|=1$. 故に最大値の原理から単位円の内部で $|R(z)|<1$. これより $1+R(z)$ は単位円内部に零点をもたず, $P(z)$ に関する仮定と (**??**) から $Q(z)$ は単位円内部に零点を持たない. しかも

$$z^m Q(1/z)=z^m P(1/z)\pm P(z)=Q(z) \tag{4.2}$$

から $Q(z)$ は単位円外部に零点を持たない. 従って $Q(z)$ の零点は単位円周上にある. □

補題 4 と補題 1, 3 の比較のため一次変換

$$z=1-s^{-1},\quad s=(1-z)^{-1} \tag{4.3}$$

を考える. この一次変換は $s=1/2\mapsto z=-1$, $s=1\mapsto z=0$, $s=\infty\mapsto z=1$ で特徴付けられ, 垂直線 $\Re(s)=1/2$ を単位円周 $|z|=1$ に写し, 実軸を実軸に写す. また変換 $s\mapsto 1-s$ は $z\mapsto 1/z$ に対応する. 補題 1, 補題 3 でそれぞれ

$$f_c(z)=F((1-z)^{-1}-c),\quad f(z)=F((1-z)^{-1}) \tag{4.4}$$

とおくと $f_c(z)$, $f(z)$ は補題 4 の $P(z)$ に対応し, 補題 1, 3 の (i) の条件は補題 4 で $P(z)$ が実軸上で実数値という事に対応し, 補題 1, 3 の (ii) の条件は $P(z)$ の零点が単位円外部にある事と対応する事が観察される. 更に (i) の条件から補題 1 で $F(s-c)/F(s+c)$, 補題 3 で $F(1-s)/F(s)$ が垂直線 $\Re(s) = 1/2$ 上で絶対値 1 であることが導かれる事と, 補題 4 の証明で $P(z)$ が実軸上で実数値である事から単位円周上で $|R(z)| = 1$ が導かれる事が対応している. また補題 1 の $F(s+c) \pm F(s-c)$, 補題 3 の $F(s) \pm F(1-s)$ の持つ関数等式は (**??**) に対応する. これらから補題 1 と補題 3 は補題 4 の拡張となっている様子が分かると思う.

では補題 1, 3 と補題 4 の違いは何かと言うと, 一つは $P(z)$ は多項式であるから根は有限個であるが, $f_c(z)$ や $f(z)$ の零点は有限個ではない事である. 補題 1, 3 の (ii) と (iii) はこのギャップを埋めるための条件となっている. もう一つは $P(z)$ は多項式だから単位円内部と単位円周上で正則であるのに対し, (**??**) で定義された $f_c(z)$, $f(z)$ は $z = 1$ で正則でない事である. この障害は補題 1 では (ii) と (iii) の条件により乗り越えられているが, 補題 3 ではこれに加えて (iv) の条件が必要となる. (iv) の条件は, z 平面で単位円の内部から $z = 1$ へ単位円の接線と垂直方向に近づくとき, $|f(1/z)/f(z)|$ が小さいという事を言っている. これのお陰で補題 4 との類似がうまくゆくのである.

ここで Riemann ゼータ関数に関する一つの結果を紹介しておく.

$$F(s) = (1-s)\int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x^2}\right) x^{s-(1/2)}\frac{dx}{x} \tag{4.5}$$

とすると $F(s)$ は整関数で, Riemann の ξ-関数は

$$\xi(s) = sF(s) + (1-s)F(1-s) \tag{4.6}$$

と表示される. $F(s)$ の零点に関して次が知られている.

命題 2 (Yegorov [**?**]). $F(s)$ は $\Re(s) < 1/2$ に零点を持たない.

RH(2), **RH**(3) の証明や命題 2 を見てみると, 補題 4 をどのように拡張するかという問題は $r = 1$ を含めた一般の **RH**(r) を考える上で興味深い問題だと思われる.

問題. 次の命題の $(*)$ にあてはまる条件を探せ.

命題. $f(z)$ は単位円内部で正則で, ($z = 1$ を除いて) 実軸上で実数値をとり, 全ての零点は単位円の外部にあるものとする. また $f(z)$ は単位円周上で $z = 1$ を除いて正則であり, $z = 1$ は特異点であるものとする. $f(z)$ が条件 $(*)$ を満たすとき, $f(z) \pm f(1/z)$ の零点は全て単位円周上にある.

なるべく応用の広い形で条件 $(*)$ を調べる事はそれ自身で面白い問題の様に思われるが如何であろうか.

References

[1] T. Hayashi, *Computation of Weng's rank 2 zeta function over an algebraic number fields*, J. Number Theory **125** (2007), no. 2, 473–527.

[2] H. Ki, *All but finitely many zeros of the approximations of the Epstein zeta function are simple and lie on the critical line*, Proc. London Math. Soc., **90** (2005), 321–344.

[3] J.C. Lagarias and M. Suzuki, *The Riemann hypothesis for certain integrals of Eisenstein series*, J. Number Theory **118** (2006), no. 1, 98–122.

[4] M. Suzuki, *The Riemann hypothesis for the Weng zeta function of rank 3 for the rationals*, Conference on L-functions, 175–199, World Sci. 2007.

[5] O. Velásquez, *Majoration du nombre de zéro d'une fonction méromorphe en dehors d'une droite verticale et applications*, Ph.D. Thesis, University of Bordeaux, 2006.

[6] A.V. Yegorov, *A remark on the distribution of the zeros of Riemann's zeta function and a continuous analogue of Kakeya's theorem*, Sbornik Math., **194** (10), 2003, 1533–1542.

[7] L. Weng, *Geometric arithmetic: a program*, Arithmetic Geometry and Number Theory, 211–400, World Sci. 2006.

[8] L. Weng, *A geometric approach to L-Functions*, Conference on L-functions, 219–370, World Sci. 2007.

Masatoshi Suzuki,
Department of Mathematics
Rikkyo University
Nishi-Ikebukuro, Toshima-ku
Tokyo 171-8501,
Japan
`suzuki@rkmath.rikkyo.ac.jp`