ゼータ関数と微分方程式
Zeta Functions and Differential Equations

鈴木 正俊*

東京工業大学理学院，2019 年 2 月

アブストラクトではゼータ函数側の事情によって微分方程式を研究する動機を書いたが，ここでは正準系という微分方程式側の視点からゼータ函数を利用することの意義を述べてみたいと思う．

1 正準系

1.1 定義

有限または無限の半開区間 $I=[0,c)$ $(0<c\le\infty)$ で定義された 2 次の実対称行列に値をもつ函数 $H(t)$ で以下の三条件を満たすものを I 上の**ハミルトニアン（Hamiltonian）**と呼ぶ:

- $H(t)$ は I 上の Lebesgue 測度 0 の部分集合を除いて半正定値であり，
- $H(t)$ は I の任意の Lebesgue 測度が正の部分集合上で恒等的に 0 でなく，
- $H(t)$ の各成分は I で局所可積分．

ハミルトニアン $H(t)$ が与えられたとき，$z\in\mathbb{C}$ でパラメータ付けられた 2×1 ベクトル値函数 $Y_z(t)$ を未知函数とする I 上の 1 階線形常微分方程式系

$$Y_z'(t)+zJH(t)Y_z(t)=0,\quad J=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix} \tag{1}$$

を，2 次元の**正準系（canonical system）**または**ハミルトン系（Hamiltonian system）**と呼ぶ．古典的な微分方程式のいくつかはこの形に帰着され統一的に扱える．例えば，時間非依存の 1 次元 Schrödinger 方程式

$$-y''(x)+q(x)y(x)=zy(x),\quad q\in L^1_{\mathrm{loc}}(I) \tag{2}$$

は同次方程式 $-y''+qy=0$ の解 α, β で $W=\alpha'\beta-\alpha\beta'\neq 0$ を満たすものを取り，$y=u\alpha+v\beta$ とおいて $u'\alpha+v'\beta=0$ という条件を課すと，$Y_z(x)={}^t[u(x,z)\ v(x,z)]$ が

$$H(x)=\frac{1}{W}\begin{bmatrix}\alpha(x)^2&\alpha(x)\beta(x)\\\alpha(x)\beta(x)&\beta(x)^2\end{bmatrix}$$

で定まる正準系を満たすことが分かる．逆に，この $H(x)$ で定まる正準系の解 $Y={}^t[u\ v]$ が得られたとき，$y=u\alpha+v\beta$ とおくと，これは

$$q=\frac{1}{W}(\alpha''\beta'-\alpha'\beta'')$$

をポテンシャルとする方程式 (2) を満たす．

* msuzuki@math.titech.ac.jp

1.2　解の性質

以下では正準系の解を

$$Y_z(t) = {}^t\begin{bmatrix}A(t,z) & B(t,z)\end{bmatrix} \tag{3}$$

で表す．まず, $H(t)$ が有限区間 $I=[0,c)$ 上で単位行列である場合を考える．このとき (1) から $A_{tt}+z^2A=0$, $B_{tt}+z^2B=0$ が従う．これを解くために, 例えば境界条件

$$\lim_{t\to c} Y_z(t) = {}^t\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \tag{4}$$

を課すと, (1) から $\lim_{t\to c} Y_z'(t) = {}^t[0 \;\; z]$ が従い,

$$A(t,z)=\cos((c-t)z), \quad B(t,z)=\sin((c-t)z) \tag{5}$$

という解が求まる．これらは共に z について整函数である．一般に（後述するような）適当な境界条件を課すと, 正準系の解の成分 $A(t,z)$, $B(t,z)$ は z の函数として整函数になる．

さて, 正準系の解 (3) に対して,

$$E(t,z) = A(t,z) - iB(t,z) \tag{6}$$

という整函数を考える．ハミルトニアンが単位行列であるときの解 (5) の場合,

$$E(t,z) = \exp(-i(c-t)z)$$

である．指数函数は様々な良い性質を持つが, ここでは次の性質に注目する: 任意の $t\in I$ に対して,

- z が上半平面（$\Im z>0$）にあれば $|\exp(-i(c-t)\bar{z})| < |\exp(-i(c-t)z)|$ が成り立ち,
- z の函数として $\exp(-i(c-t)z)$ は実軸上に零点を持たない．

この性質は「$E(t,z)=\exp(-i(c-t)z)$ は z の函数として **Hermite–Biehler クラス**に属す」と言い換えることができる．Hermite–Biehler クラス（以下, $\mathbb{HB}$ で表す）とは, 次の二条件を満たす整函数 $E(z)$ 全体が成すクラスである:

(i) z が上半平面（$\Im z>0$）にあれば $|E(\bar{z})|<|E(z)|$ が成り立ち,
(ii) 実軸上に零点を持たない．

一般に, 適当な境界条件の下での解を用いて $E(t,z)$ を (6) により定義すると, ほとんど全ての $t\in I$ に対して $E(t,z)$ は $\mathbb{HB}$ に属す．つまり, 正準系の解から $\mathbb{HB}$ の元が得られる．実はこの逆が成り立つ．

定理 1 (de Branges, 1960$\pm\varepsilon$)**.** *整函数 $E(z)$ は $\mathbb{HB}$ に属し $E(0)=1$ とする．このとき, ある有限または無限の区間 $I=[0,c)$ で定義されたハミルトニアン $H(t)$ が存在して, 次の事柄が成り立つ: $H(t)$ で定まる正準系の解 (3) で, 境界条件*

$$\lim_{t\to c} \frac{\overline{A(t,z)}B(t,w) - A(t,w)\overline{B(t,z)}}{\pi(\bar{z}-w)} = 0 \quad (z,w\in\mathbb{C}) \tag{7}$$

を満たすもが存在して, (6) により $E(t,z)$ を定めると,

(i) *$t=0$ を含むほとんどすべての $t\in I$ に対して, $E(t,z)$ は $\mathbb{HB}$ に属し, $E(t,0)=1$ である．しかも,*
(ii) *$E(z)=E(0,z)$.*

注意 境界条件 (4) が成り立てば境界条件 (7) も成り立つ．

1.3 順問題と逆問題

与えられたハミルトニアン $H(t)$ に対して, (7) のような $t = c$ での境界条件もしくは $t = 0$ での適当な境界条件のもとで $E(t, z)$ を求める問題を**順問題**と呼ぶ. いっぽう, 与えられた $E(z) \in \mathbb{HB}$ に対して, 定理 1 のような $H(t)$ を求める問題を**逆問題**という.

$$H(t) \underset{\text{逆問題}}{\overset{\text{順問題}}{\rightleftarrows}} E(z)$$

順問題が比較的容易なのに対して, 逆問題は難しいことがほとんどである. これは逆問題が, Schrödinger 方程式 (2) のスペクトル・データからポテンシャル q を復元するようなスペクトル逆問題の一種だからだと言えば, その困難さが推測されるであろう. また, 順問題が比較的容易とはいっても, $E(z)$ が既知の函数による分かりやすい形で書けるとは限らない.

こういった事情から, 具体的に知られている $H(t)$ と $E(z)$ のペアは多くはない. したがって, そういったペアの例を系統的に増やすことには意味があるであろう. 次節からは**「ゼータ函数と呼ばれる一連の函数たちから, $H(t)$ が（ある程度）分かるような $E(z)$ が得られる」**という事について解説する.

ゼータ函数は数論においてとても大事な由緒正しい函数たちである. この意味で, それらに対応する $H(t)$ も "良い" ものであろうと推測されるが, まだまだ未解明な点が多く, これからの研究が待たれる. 参考のため, 考えられる課題をいくつか第 5 節に挙げてみたが, 他にも面白い問題はたくさん考えられるだろう.

正準系や, その順問題・逆問題に関する文献としては [6, 7, 11, 12] などが見やすい. より詳しく知りたい場合は, これらや [8, 9] の文献表も参考になると思う.

2 ゼータ函数

ゼータ函数というのは, 現代の数論における重要なキーワードの一つであり, その起源は Euler や Riemann が素数分布の研究に **Riemann ゼータ函数**

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:\text{素数}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

を導入したことに遡る. ここで s は複素変数であり, ゼータ函数の研究では変数に s を用いる事が多い. しばしば Euler 積と呼ばれる右辺の素数をわたる積表示の存在が, 素数分布論に $\zeta(s)$ の解析的性質を応用するための鍵である. 右辺の級数や無限積は右半平面 $\Re(s) > 1$ でしか収束しないが, 複素平面全体に有理型に解析接続され, $s = 1$ で一位の極を持つ他は正則な関数を定める. そして, ガンマ函数 $\Gamma(s)$ を用いて, $\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ と定義したとき $\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$ というきれいな函数等式を満たす.

ゼータ函数という名称は, Riemann ゼータ函数がもつこれらの性質をいくつも満たす（あるいは満たすと予想される）函数に付けられる通称であることが多い. しかも, ゼータ函数の特定の性質がどのような数論的性質と関係するかは, ゼータ函数毎に異なるうえ, 関連の仕方も多岐にわたる. そこでこの記事では, そのような事に立ち入るのは避け, ゼータ函数を解析的性質により公理的に特徴付けて扱う Selberg クラスと呼ばれる函数のクラスの紹介することで, 典型的なゼータ函数の解析的性質とはどういうものかだけを述べる.

Selberg クラスとは, 以下の 5 つの公理を満たす Dirichlet 級数全体の集合を指す:

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \tag{8}$$

(S1) Dirichlet 級数 (8) は $\Re(s) > 1$ のとき絶対収束する.

(S2) **(解析接続)** ある非負整数 m が存在して, $(s-1)^m Z(s)$ は位数有限の整関数に解析接続される.

(S3) **(関数等式)** 適当な $r \geq 0$, $Q > 0$, $\lambda_j > 0$, および実部が非負の複素数 μ_j を用いて

$$\Lambda(s) = Q^s \prod_{j=1}^{r} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j) \cdot Z(s) = \gamma(s) \cdot Z(s)$$

と定めると, ある絶対値が 1 の複素数 ϵ に対して, 関数等式 $\Lambda(s) = \epsilon\overline{\Lambda(1-\bar{s})}$ が成り立つ.

(S4) **(Ramanujan 予想)** 任意の正数 ε に対して, ある $M > 0$ が存在して, $|a(n)| \leq Mn^{\varepsilon}$ が成り立つ.

(S5) **(Euler 積)** $\Re(s)$ が十分大きいとき

$$\log Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s}$$

という表示が成り立つ. ここで $b(n)$ は $n = p^m$ $(m \geq 1)$ である場合を除いて 0 であり, ある $\theta < 1/2$ と M' が存在して $|b(n)| \leq M' n^{\theta}$ を満たすものとする.

Riemann ゼータ関数をはじめ, 原始的 Dirichlet 指標に付随した Dirichlet L 関数 $L(s,\chi)$, Dedekind ゼータ関数, 正則保型形式の L 関数などは Selberg クラスに属すことが知られている. (S5) から Euler 積表示

$$Z(s) = \prod_p Z_p(s), \quad Z_p(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a(p^{ms})}{p^{ms}} \tag{9}$$

が従う. 知られている例では $Z_p(s)$ は適当な多項式 $F_p(x) \in 1 + x\mathbb{C}[x]$ により

$$Z_p(s) = F_p(p^{-s})^{-1} \tag{10}$$

と表されている. Riemann ゼータ函数の場合に因んで, $Z(s)$ の非自明零点はみな函数等式の中心線上にあるだろうという予想, すなわち「$\Lambda(s) = 0$ ならば $\Re(s) = 1/2$ である」という予想を**大 Riemann 予想 (Grand Riemann Hypothesis, GRH) と呼ぶ.** Selberg クラスの全ての元は GRH を満たすと予想されているが, 証明または反証が成されている例は一つもない.

Selberg クラスの場合に限らず, ゼータ函数は (9) のような素数をわたる積表示を持つ. その因子に現れる $Z_p(s)$ のような函数はしばしば局所ゼータ函数と呼ばれる. これに対して, 局所ゼータ函数の積になっている（もしくはそのように定義される）ゼータ函数をしばしば大域的ゼータ函数と呼ぶ. 実のところ, (S3) にあるガンマ因子 $\gamma(s)$ も局所ゼータ函数の一種なのだが, それには触れない.

様々なゼータ函数の理論を横断的に解説しているような著書や記事は非常に稀だが, 岩波数学辞典（第 5 版）の『ゼータ関数』の項目は稀有な例外の一つだろう. 値の non-vanishing を軸に種々のゼータ函数について概説している [4] も挙げておこう. Selberg クラスについて知るには概説記事 [5] を見ると良いだろう. Selberg クラスより若干砕けたゼータ函数の公理的取り扱いとしては [2] の 5 章も良い.

3　逆問題と局所ゼータ函数

多くの場合, 局所ゼータ函数の表示 (10) に現れる多項式 $F_p(x)$ は, 適当なスケール変換 $Q(x) = F_p(cx)$ を行うことにより, ある自然数 n に対して等式 $Q(x) = x^n Q(1/x)$ を満たす自己相反多項式となり, $Z_p(s)$ の局

所 Riemann 予想は「$Q(x)$ の根が全て単位円周上にある」という主張に翻訳される．そこで以下では, より一般的な自己相反多項式と正準系の関係について述べる．ただし, 簡単のため偶数次の多項式のみを扱う．

与えられた $2g$ 次の自己相反多項式 $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ について,

$$E_P(z) = e^{-igz}P(e^{iz}) + i\frac{d}{dz}\left(e^{-igz}P(e^{iz})\right) = \sum_{k=-g}^{g} C_k e^{ikz} \tag{11}$$

とおく．このとき $P(x)$ の根がみな単位円周上の単根であることと, $E_P(z) \in \mathbb{HB}$ は同値である．(11) の右辺の係数を用いて $2g+1$ 次の下三角行列 $\mathcal{E}_P^{\pm}$ を

$$\mathcal{E}_P^{\pm} = \begin{bmatrix} C_{\mp g} & & & & & & \\ C_{\mp(g-1)} & C_{\mp g} & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \\ C_0 & C_{\mp 1} & \ddots & C_{\mp g} & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ C_{\pm(g-1)} & C_{\pm(g-2)} & \ddots & \ddots & \ddots & C_{\mp g} & \\ C_{\pm g} & C_{\pm(g-1)} & \cdots & C_0 & \cdots & C_{\mp(g-1)} & C_{\mp g} \end{bmatrix}$$

により定める．また, 左上に反対角成分が全て 1 で他の成分は 0 の m 次正方行列を持ち, それ以外の成分はみな 0 であるような $2g+1$ 次の正方行列を J_m と表す．そして, $[0,g)$ 上の局所定数関数 $\gamma_P(t)$ を

$$\gamma_P(t) = \frac{\det(\mathcal{E}_P^+ + \mathcal{E}_P^- J_{m-1})\det(\mathcal{E}_P^+ + \mathcal{E}_P^- J_m)}{\det(\mathcal{E}_P^+ - \mathcal{E}_P^- J_{m-1})\det(\mathcal{E}_P^+ - \mathcal{E}_P^- J_m)} \quad \text{if} \quad \frac{m-1}{2} \le t < \frac{m}{2} \tag{12}$$

により定める．ある $1 \le m \le 2g$ について $\det(\mathcal{E}_P^+ - \mathcal{E}_P^- J_m) = 0$ なら $\gamma_P(t)$ は $(m-1)/2 \le t < m/2$ で定義されないと考える．このとき次が成り立つ．

定理 2 ([8])**.** *自己相反多項式 P に対して, 上で定めた E_P が $\mathbb{HB}$ に属するためには, $\gamma_P(t)$ が $[0,g)$ 上で定義され $\gamma_P(t) > 0$ であることが必要かつ十分である．さらに, E_P が $\mathbb{HB}$ に属するならば, E_P は*

$$H_P(t) = \begin{bmatrix} 1/\gamma_P(t) & 0 \\ 0 & \gamma_P(t) \end{bmatrix}$$

で定まる正準系の境界条件 $\lim_{t\to g} Y_z(t) = {}^t[\,E_P(0) \quad 0\,]$ を満たす解 $Y_z(t) = {}^t[\,A(t,z) \quad B(t,z)\,]$ により $E_P(z) = A(0,z) - iB(0,z)$ のように復元される．

4 逆問題と大域ゼータ函数

ここでは大域的ゼータ函数の例として, Riemann ゼータ函数 $\zeta(s)$ をとって逆問題の構成について述べる．以下の事柄は, Selberg クラスに属すより一般のゼータ函数に対しても成り立つが, それについては [9] を参照して頂きたい．さて, $\xi(s) = s(s-1)\hat{\zeta}(s)$ とおくと, これは函数等式 $\xi(s) = \xi(1-s)$, $\xi(s) = \overline{\xi(\bar{s})}$ を満たす整函数である．整数 $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ に対して

$$E_n(z) = \xi\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{n} - iz\right)^n$$

とおく．このとき, $\xi(s)$ の零点がすべて $\Re(s) = 1/2$ 上にあること（Riemann 予想）と, すべての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して E_n が $\mathbb{HB}$ に属することは同値である．

いま $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $v > 1/2 + 2/n$ を一つとり，

$$K_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E_{-n}(u+iv)}{E_n(u+iv)} e^{-i(u+iv)x} \, du$$

と定めると，これは $v > 1/2 + 2/n$ によらない $[0, \infty)$ を台とする $\mathbb{R}$ 上の連続函数を定める．これを用いて $t > 0$ でパラメータ付けられた積分作用素の族 $\mathcal{K}_{n,t}$

$$(\mathcal{K}_{n,t} f)(x) = \mathbf{1}_{(-\infty,t]}(x) \int_{-\infty}^{t} K_n(x+y) f(y) \, dy$$

を考えると，各 $\mathcal{K}_{n,t}$ は $L^2(-\infty, t)$ 上の自己共役なコンパクト作用素である．このとき，積分作用素の Fredholm 行列式を用いて, $[0, \infty)$ 上の関数 $\gamma_n(t)$ を

$$\gamma_n(t) = \frac{\det(1 + \mathcal{K}_{n,t})^2}{\det(1 - \mathcal{K}_{n,t})^2} \quad (t > 0), \qquad \gamma_n(0) = 1$$

で定める．ある $t > 0$ について $\det(1 - \mathcal{K}_{n,t}) = 0$ なら，その点で $\gamma_n(t)$ は定義されないと考える．このとき次が成り立つ．

定理 3 ([9, 10])**.** 函数 $\xi(s)$ に対して, 上で定めた E_n が $\mathbb{HB}$ に属するためには, $\gamma_n(t)$ が $[0, \infty)$ 上で定義され, $\gamma(t) > 0$ であることが必要かつ十分である．さらに, E_n が $\mathbb{HB}$ に属するならば, E_n は

$$H_n(t) = \begin{bmatrix} 1/\gamma_n(t) & 0 \\ 0 & \gamma_n(t) \end{bmatrix}$$

で定まる正準系の境界条件 (7) を満たす解 $Y_z(t) = {}^t[\, A_n(t,z) \;\; B_n(t,z)\,]$ により $E_n(z) = A_n(0,z) - iB_n(0,z)$ のように復元される．

自己相反多項式に対する $\gamma_P(t)$ の定義 (12) において, 形式的に $\mathcal{K}_{P,m} = (\mathcal{E}_P^+)^{-1} \mathcal{E}_P^- J_m$ とおくと,

$$\gamma_P(t) = \frac{\det(1 + \mathcal{K}_{P,m-1}) \det(1 + \mathcal{K}_{P,m})}{\det(1 + \mathcal{K}_{P,m-1}) \det(1 + \mathcal{K}_{P,m})}$$

と書けるから, 定理 2 と定理 3 の類似性は明らかであろう．定理 3 の $\gamma_n(t) > 0$ という条件は $\gamma_n(t) \neq 0$ を意味するだけだが, 結果の類似性を強調するためこのように書いた．定理 3 前半の条件は [9] では $E_n \in \mathbb{HB}$ の必要条件でしかなく, 十分条件はもう少し強いが, それは [10] で上記の形に改良される予定である．

5　考えられる今後の課題

5.1　大域ゼータ函数に対する理論の改良

自己相反多項式に対しては単一の整函数 E_P が考察されているのに対し, Riemann ゼータ函数の場合は整函数の族 $\{E_n\}_n$ が考察されている点で類似にギャップを感じた読者もおられるだろう．実は

$$E_{[\infty]}(z) = \xi(\tfrac{1}{2} - iz) + \xi'(\tfrac{1}{2} - iz)$$

という整函数を考えると, $E_{[\infty]}$ が $\mathbb{HB}$ に属することと, Riemann 予想より強い「$\xi(s)$ の零点はすべて $\Re(s) = 1/2$ 上の単純零点である」という主張が同値になる [3]．したがって，これに対応するハミルトニアン

$H_{[\infty]}(t)$ が $H_P(t)$ や $H_n(t)$ と同様の手法で構成できればより自然なのだが, それを正当化する手段はよく分からず, これからの課題の一つである. 一つの試みとして, 現在執筆中の [10] では, $E_{[\infty]}$ の代わりに

$$E_\infty(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{E_n(z)}{\xi(1/2 - iz)^n} = \exp\left(2\frac{\xi'}{\xi}\left(\frac{1}{2} - iz\right)\right)$$

という函数を考えた. これは整函数ではなく, それどころか $\xi(1/2 - iz)$ の零点に真性特異点を持つので有理型函数ですらない. しかしながら, 上半平面で $|E_\infty(\bar{z})| < |E_\infty(z)|$ が成り立つことと Riemann 予想は同値になり, 十分大きな $v > 0$ に対して

$$K_\infty(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-4\frac{\xi'}{\xi}\left(\frac{1}{2} - i(u+iv)\right)\right) e^{-i(u+iv)x}\, du$$

と定義すると, $\{\mathcal{K}_{n,t}\}_t$ と同様に定まる作用素の族 $\{\mathcal{K}_{\infty,t}\}_t$ に対し, 概ね $\{\mathcal{K}_{n,t}\}_t$ と同様の理論が展開できる.

5.2 漸近挙動の解明

$E_n \in \mathbb{HB}$ ならば, $\mathcal{K}_n = \lim_{t\to\infty} \mathcal{K}_{n,t}$ は $L^2(\mathbb{R})$ 上の等距離作用素で, $\mathcal{K}_n^2 = 1$ が成り立つ. したがって, $t \to \infty$ における $\det(1 \pm \mathcal{K}_{n,t})$ や $\gamma_n(t)$ の漸近挙動に興味が持たれる.

例えば, $L(x,y) = \sin(x-y)/(\pi(x-y))$ を核とする $L^2(0,t)$ 上の積分作用素 $\mathcal{L}_t$ について, Dyson によって 1976 年に予想された漸近式 $\det(1 - \mathcal{L}_t) \sim \exp(-t^2/8)$ $(t \to \infty)$ が Widom によって 1994 年に証明されて以来, 特にランダム行列理論に由来する積分作用素の族について, Fredholm 行列式の漸近挙動が活発に研究されているが, われわれの $\gamma_n(t)$ に直ちに応用できる結果は無いように思われる.

$E_n \in \mathbb{HB}$ ならば $\det(1 \pm \mathcal{K}_{n,t}) \neq 0$ なので, $L^2(-\infty, t)$ 上の積分方程式

$$((1 \pm \mathcal{K}_{n,t})\phi_{n,t}^{\pm})(x) = \mathbf{1}_{(-\infty,t]}(x) K_n(x+t) \tag{13}$$

は唯一つの解を持つ. これを用いると, ハミルトニアン $H_n(t)$ の成分 $\gamma_n(t)$ は

$$\gamma_n(t) = \exp\left(2\int_0^t (\phi_{n,\tau}^+(\tau) + \phi_{n,\tau}^-(\tau))\, d\tau\right)$$

と表示できる. この表示と積分方程式の数値解法から, $\gamma_n(t)$ は $t \to \infty$ で指数的に増加する事が観察されるが, 現時点では予想として定式化できるほどには詳しく調べていない.

5.3 消散型波動方程式

定理 3 の $A_n(t,z)$, $B_n(t,z)$ について,

$$A_n(t,z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_n(t,x)\cos(zx)\, dx, \quad B_n(t,z) = -\int_{-\infty}^{\infty} G_n(t,x)\sin(zx)\, dx$$

により $F_n(t,x)$, $G_n(t,x)$ を定めると, これらは次の消散型波動方程式を満たす:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}F_n - 2\mu_n\frac{\partial}{\partial t}F_n = \frac{\partial^2}{\partial x^2}F_n, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}G_n + 2\mu_n\frac{\partial}{\partial t}G_n = \frac{\partial^2}{\partial x^2}G_n, \quad 2\mu_n = \frac{\gamma_n'}{\gamma_n}.$$

したがって E_n を復元するような $H_n(t)$ で定まる正準系の順問題は, これらの消散型波動方程式の初期値問題（$F_n(0,x) = f_n(x)$, $G_n(0,x) = g_n(x)$）に帰着される. 一般に, 消散項（いまの場合は $\mp 2\mu$）が非負でないような消散型波動方程式は, 物理的意味が良く分からないなどの理由であまり研究されていないようである. ちなみに数値実験からは, μ_n は正値であろうと推察される. [9] にあるように, F_n, G_n は積分方程式 (13) の解を用いて書き下すことができるが, 消散型波動方程式の理論から何か新しい見方ができれば面白いと思う.

5.4 奇妙な初期値問題

前節の $F_n(t,x)$, $G_n(t,x)$ について, $\gamma_P(t)$ と $\gamma_n(t)$ の構成法の類似性から

$$\gamma_n(t) = \lim_{x\to\infty} \frac{F_n(t,-x)+F_n(t,x)}{G_n(t,-x)-G_n(t,x)} \tag{14}$$

が成り立つ事が期待されるが, 今のところ証明も反証もできていない. しかしながらこれを認めると, E_n を復元するような $H_n(t)$ に付随する正準系の順問題は, 次の偏微分方程式系の初期値問題に帰着される:

$$\frac{\partial}{\partial t}G_n + \frac{1}{\gamma_n}\frac{\partial}{\partial x}F_n = 0, \frac{\partial}{\partial t}F_n + \gamma_n\frac{\partial}{\partial x}G_n = 0, \quad (14), \quad F_n(0,x) = f_n(x), \quad G_n(0,x) = g_n(x).$$

この問題は (14) の存在によって, 方程式の形と初期値だけで解が決まる形をしているのが面白いと思うが, 筆者が調べたり専門家に聞いたりした限りでは, この形の偏微分方程式系を扱う一般論のようなものは無さそうであった. もしそういうものができるとすれば, [8] に自己相反多項式 P に対して $\gamma_P(t)$ を P から定まる初期ベクトルを用いて帰納的に計算してく方法を書いたが, その方法の類似にあたるものになるだろう.

参考文献

[1] Dym, H., *An introduction to de Branges spaces of entire functions with applications to differential equations of the Sturm-Liouville type*, Advances in Math. **5** (1970), 395–471.

[2] Iwaniec, H. and Kowalski, E., *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[3] Lagarias, J. C., *Hilbert spaces of entire functions and Dirichlet L-functions*, Frontiers in number theory, physics, and geometry. I, Springer, Berlin, (2006), 365–377.

[4] Murty, M.R. and Murty, V.K., *Non-vanishing of L-functions and applications*, Progress in Mathematics **157**, Birkhauser, Basel, 1997.

[5] Perelli, A., *A Survey of the Selberg Class of L-Functions, Part I*, Milan J. math. **73** (2005), 19–52.

[6] Romanov, R., *Canonical systems with discrete spectrum*,
`https://arxiv.org/abs/1408.6022`

[7] Romanov, R. and Woracek, H., *Canonical systems with discrete spectrum*, preprint, 2019.

[8] Suzuki, M., *An inverse problem for a class of canonical systems and its applications to self-reciprocal polynomials*, J. Anal. Math. **136**, (2018), 273–340.

[9] Suzuki, M., *Hamiltonians arising from L-functions in the Selberg class*,
`https://arxiv.org/abs/1606.05726`.

[10] Suzuki, M., *Hamiltonians arising from L-functions in the Selberg class II*, in preparation.

[11] Winkler, H., *Two-dimensional Hamiltonian systems*, , Operator Theory, D. Alpay (eds.), Springer, Basel, 2015, 525–547.

[12] Woracek, H., *De Branges spaces and growth aspects*, Operator Theory, D. Alpay (eds.), Springer, Basel, 2015, 489–523.