ゼータ関数と微分方程式
Zeta Functions and Differential Equations

鈴木 正俊*

東京工業大学理学院，2019 年 2 月

ゼータ函数というのは, 現代の数論における重要なキーワードの一つであり, その起源はオイラーやリーマンが素数分布の研究に**リーマンゼータ函数**

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:\text{素数}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

を導入したことに遡る．ここで s は複素変数であり, ゼータ函数の研究では変数に s を用いる事が多い．右辺の級数や無限積は右半平面 $\Re(s) > 1$ でしか収束しないが, 複素平面全体に有理型に解析接続され, $s = 1$ で一位の極を持つ他は正則な関数を定める．そして, ガンマ函数 $\Gamma(s)$ を用いて, $\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ と定義したとき $\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$ というきれいな函数等式を満たす．ゼータ函数という名称は, リーマンゼータ函数がもつこれらの性質をいくつも満たす函数に付けられる通称であることが多いが, セルバーグ・クラスと呼ばれる函数のクラスのように, ゼータ函数を公理的に特徴付けて扱うこともある．

ゼータ函数が持つ解析的性質は, 様々な数論的性質の解析的な表現として興味が持たれ, 多くの研究が成されてきた．それらの中で最も未解明な部分が多いのが零点の分布であり, それは数論的に最も重要な命題の成否に直接結びついていることが多い．例えばリーマンゼータ函数の場合, ある $1/2 < a < 1$ に対して, 右半平面 $\Re(s) > a$ で $\zeta(s)$ が非零であることと, 誤差項付きの素数定理

$$\psi(x) = \sum_{p^k \le x} \log p = x + O(x^a) \quad (x \to \infty)$$

が成り立つことは同値である．ここで右辺の和は x 以下の素数ベキ p^k 毎に $\log p$ を加えることを意味し, O はランダウ記号である．ミレニアム懸賞問題の一つとして有名な**リーマン予想**は $a = 1/2$ の場合, すなわち, 右半平面 $\Re(s) > 1/2$ で $\zeta(s)$ が非零だろうという予想である．この場合は誤差項の形を若干修正せねばならない．

しかしながら, 保型表現やガロア表現, ラングランズ予想等の現代的理論の発展に応じて日々解明が進んでいる解析接続や函数等式といった性質とは大きく異なり, 零点の分布を調べる理論や手法にはいまだ主流と言ってよいものが無い．そこでこの講演では, 以下のような筋道を背景とした, ゼータ函数の零点分布を微分方程式の立場から考察する試みについて解説したい．

まず慣習に従って, 先の $\hat{\zeta}(s)$ に極を消す因子 $s(s-1)$ を乗じたのち, $s = 1/2 - iz$ と変数変換した函数を $\Xi(z)$ と書く．これは整函数かつ偶関数である．このとき, リーマン予想は $\Xi(z)$ の零点がみな実であるという

* msuzuki@math.titech.ac.jp

主張に言い換えられる．無限個の零点をもち，それらがみな実数であるような整函数の例として，最も単純なものは余弦函数や正弦函数であろう．そこで，$\Xi(z)$ がある整函数 $E(z)$ によって余弦函数のように

$$\Xi(z) = \frac{1}{2}(E(z) + E(-z)) \tag{1}$$

と表示されたと仮定してみる．すると $\Xi(z)$ の零点がみな実数になるような $E(z)$ の十分条件の一つとして

『虚部が正である任意の複素数 z に対して，$|E(-z)| \le |E(z)|$ が成り立つ』 (2)

という条件を挙げることができる．余弦函数の場合 $E(z) = \exp(-iz)$ に対して等式 (1) と条件 (2) が成り立っている．実は等式 (1) と条件 (2) の双方を満たすような整函数 $E(z)$ の存在はリーマン予想の必要十分条件であり，そのような $E(z)$ の一つとして $\Xi(z) + i\,\Xi'(z)$ がとれる [La]．この意味で，$\Xi(z)$ は余弦函数の類似とみなせる．この類似をもう少し深く掘り下げてみよう．実数 $t > 0$ に対して $E_t(z) = \exp(-itz)$ とおき，

$$\frac{1}{2}(E_t(z) + E_t(-z)) = \cos(tz), \quad \frac{i}{2}(E_t(z) - E_t(-z)) = \sin(tz), \quad H(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と定めると，$X_z(t) = {}^t[\cos(tz)\ \ \sin(tz)]$ は z をパラメータとする $t > 0$ 上の常微分方程式系

$$-\frac{d}{dt}X_z(t) + z\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} H(t)X_z(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

を満たし，組 ${}^t[\cos z\ \ \sin z]$ は初期条件 $\lim_{t\to 0} X_z(t) = {}^t[1\ 0]$ を満たすこの常微分方程式系の解の $t = 1$ での特殊化として捉えられる．一般に，ある区間上で定義された 2 次の**半正定値**実対称行列に値を持つ函数 $H(t)$ に対して，(3) の形の常微分方程式系を 2 次元の**正準系** (canonical system) とか**ハミルトン系** (Hamiltonian system) などと言う (本当はもう少し $H(t)$ に条件がつく)．

適当な初期条件のもと，正準系の解 $X_z(t)$ の成分は，z の函数として，実零点のみをもつ整函数であることが知られている．いっぽう，リーマン予想と同値な条件である $\Xi(z)$ の零点がみな実数であることを仮定すると，正準系の一般論により，$\Xi(z)$ はある正準系の解の特殊化（の成分）として得られることが分かる．つまり，正準系の観点からすると，リーマン予想は対応する正準系の $H(t)$（と初期条件）に集約される．

この事実を踏まえると，$\Xi(z)$ に対応する $H(t)$ が具体的にどんなものであるかに興味が持たれるが，正準系の一般論から分かるのは $H(t)$ の**存在のみ**で，その具体形などについてはほとんど何も分からない．こういった理由から，講演者は $H(t)$ の具体的な構成法について興味をもち，研究を進めた結果として，与えられたゼータ函数から明示的に定まる行列や積分作用素を用いて $H(t)$ の表示を与える手法を [Su1, Su2] で述べた．講演ではその構成の概要を述べたうえ，関連する問題などについてもお話したい．

参考文献

[La] Lagarias, J. C., *Hilbert spaces of entire functions and Dirichlet L-functions*, Frontiers in number theory, physics, and geometry. I, Springer, Berlin, (2006), 365–377.

[Su1] Suzuki, M., *An inverse problem for a class of canonical systems and its applications to self-reciprocal polynomials*, J. Anal. Math. **136**, (2018), 273–340.

[Su2] Suzuki, M., *Hamiltonians arising from L-functions in the Selberg class*, `https://arxiv.org/abs/1606.05726`.