

Intrinsic Ultracontractivity for domains in negatively curved manifolds

相川弘明 (中部大学工学部)

領域 D が Intrinsic Ultracontractive (IU) とは D が正の Dirichlet 最小固有値をもち、最小固有関数で正規化した熱半群が本質的に超縮小的のときをいう。IU から Cranston-McConnell 不等式のような興味深い性質が導かれるとともに、IU は非常に複雑な領域に対して成り立つ。

この講演では Ricci 曲率が負定数で下から押さえられる多様体 M 上の領域 D が IU となるシャープな十分条件を容量的幅 $w_\eta(D)$ によって与える。本質的な発見は D の Dirichlet スペクトラムの下端 $\lambda_{\min}(D)$ とねじれ関数 $v_D = \int_D G_D d\mu$ の容量的幅 $w_\eta(D)$ による評価： $w_\eta(D)$ が十分小さいならば，

$$\frac{C^{-1}}{w_\eta(D)^2} \leq \frac{1}{\|v_D\|_\infty} \leq \lambda_{\min}(D) \leq \frac{C}{\|v_D\|_\infty} \leq \frac{C^2}{w_\eta(D)^2}$$

である。ユークリッド空間と異なり、「 $w_\eta(D)$ が小さい」は不可欠である。実際、定曲率 -1 の双曲多様体 \mathbb{H}^n は

$$\lambda_{\min}(\mathbb{H}^n) = \frac{(n-1)^2}{4},$$

であるが $v_{\mathbb{H}^n} \equiv \infty$ である。