モチーフ積分と McKay 対応

安田健彦

モチーフ積分理論とその McKay 対応への応用を紹介する。McKay 対応については、近年講演者が取り組んでいる野性的（wild）状況への一般化に焦点を当てたい。

モチーフ積分は p 進積分の類似として Kontsevich により導入された。この理論では、代数多様体のアーク空間上に定義されるモチーフ測度に関する積分を考える。アークとは形式円盤 $\operatorname{Spec} k[[t]]$ から代数多様体への射のことを意味し、アーク空間とは与えられた代数多様体に対するアーク全体のなす無限次元空間のことである。測度や積分は実数値ではなく、代数多様体の Grothendieck 環の適当な拡張に値をとる。そのため、積分が代数多様体に関する精密な情報を含むことが可能となる。Batyrev は正標数還元と p 進積分を用いて、双有理同値な Calabi-Yau 多様体は等しい Betti 数を持つことを示した。モチーフ積分を用いると Hodge 構造の同型まで結果を強めることができる。

有限群 G のアフィン空間 $\mathbb{A}_k^d$ への線形作用（つまり、G の有限次元表現）に対し、商多様体 $\mathbb{A}_k^d/G$ が定義される。これは通常、商特異点と呼ばれる特異点を持つ。近年、McKay 対応は様々な文脈で語られるが、多くの場合、商多様体やその特異点解消（幾何サイド）と G 表現（代数サイド）から同じ不変量が得られること意味する。どのような不変量を考えるかによって様々なアプローチがあるが、Batyrev と Denef-Loeser はモチーフ的不変量とモチーフ積分を使ったアプローチを取った。特に重要な結果として、基礎体が $k = \mathbb{C}$ で商多様体 $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^d/G$ がクレパント特異点解消 Y を持つとき、Y の位相的 Euler 標数が G の共役類の個数に等しいことが従う。

基礎体 k が標数 $p > 0$ を持ち、G の位数が p で割り切れる状況を野性的という。逆に割り切れない場合（ここに標数零も含める）を従順であるという。野性的な場合は従順な場合に比べ、解析が大変難しくなることが知られている。モチーフ積分を使った McKay 対応へのアプローチを野性的状況で考えると、自然と冪級数体 $k((t))$ のガロア拡大をコントロールする問題が生じる。これにより局所体のガロア拡大やその分岐を調べる整数論的テーマ（局所類対論など）との関連が生じる。野性 McKay 対応を通して、冪級数体のガロア拡大の重み付き数え上げ（代数・数論サイド）と商多様体 $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^d/G$ の特異点の悪さや特異点解消の計算（幾何サイド）を関係付けることができる。