Singular perturbation problems for nonlinear Choquard equations

早稲田大学理工学術院

田中和永

次の非線形 Choquard 方程式に対する特異摂動問題をあつかう.

$$-\varepsilon^2\Delta v + V(x)v = \frac{1}{\varepsilon^\alpha}(I_\alpha * F(v))F'(v) \quad \text{in } \mathbf{R}^N. \tag{$(*)_\varepsilon$}$$

ここで $N \geq 3$, $\alpha \in (0, N)$ であり $I_\alpha(x) = \frac{A_\alpha}{|x|^{N-\alpha}}$ は Riesz potential, $V(x) \in C^1(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$ である. また $F \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ は $F(v) = |v|^p$ に代表される非線形項である. ここでは $\varepsilon > 0$ が小さいときに, $(*)_\varepsilon$ の解の存在を変分的手法により考える.

特異摂動問題は次の非線形シュレディンガー方程式に対して非常によく研究されている.

$$-\varepsilon^2\Delta v + V(x)v = f(u) \quad \text{in } \mathbf{R}^N. \tag{$(**)_\varepsilon$}$$

このような研究は A. Floer, A. Weinstein の 1986 年の研究に始まり, ポテンシャル関数 $V(x)$ の臨界点に凝集する解の存在およびその解の軌道安定性等が議論されている.

ここでは, $(**)_\varepsilon$ に関する成果を概観すると共に最近の Choqurad 方程式に関する成果についてお話したい.