体積保存型幾何学発展方程式の解の挙動について

高坂　良史

神戸大学大学院海事科学研究科

本講演では，体積保存性のある幾何学的発展方程式の解の挙動について考察する．今，$\Gamma(t)$ を時間発展する曲面とし，$\Gamma(t)$ の挙動が以下の幾何学的発展方程式によって支配されているとする．

$$V = H - H_{av}, \tag{1}$$

$$V = -\Delta_{\Gamma(t)} H. \tag{2}$$

ここで，V は $\Gamma(t)$ の法速度，H は $\Gamma(t)$ の平均曲率を表す．平均曲率 H の符号としては，例えば $\Gamma(t)$ として球を考えた場合，外向き法線ベクトルに対して $\Gamma(t)$ の平均曲率 H は負であるようにとる．また，H_{av} は平均曲率 H の $\Gamma(t)$ 上での平均値を表し，Δ_Γ は $\Gamma(t)$ 上の Laplace-Beltrami 作用素を表す．(1) は体積保存型平均曲率流，(2) は表面拡散方程式と呼ばれ，それぞれ $\Gamma(t)$ の表面積汎関数に対する勾配流となることが知られている．実際，

$$L^2_0(\Gamma) := \left\{ \varphi \in L^2(\Gamma) \,\middle|\, \int_\Gamma \varphi \, dS = 0 \right\}, \quad H^{-1}(\Gamma) := \left\{ \varphi \in [H^1(\Gamma)]^* \,\middle|\, \langle \varphi, 1 \rangle = 0 \right\},$$

とすると，(1) は表面積汎関数の空間 $L^2_0(\Gamma(t))$ に関する勾配流，(2) は空間 $H^{-1}(\Gamma(t))$ に関する勾配流となる．上記の空間で勾配流を考えるとき，法速度 V の平均値は 0 でなければならず，これは $\Gamma(t)$ が囲む領域の体積の時間微分が 0 であることを意味する．したがって，これらの幾何学的発展方程式は，$\Gamma(t)$ が囲む領域の体積が一定という条件下で，$\Gamma(t)$ の表面積を時間とともに減少させるという変分構造をもつ．上記の方程式を偏微分方程式としてとらえる場合，(1) は非局所項をもつ非線形 2 階放物型偏微分方程式，(2) は非線形 4 階放物型偏微分方程式となる．

幾何学的発展方程式 (1) または (2) の解の挙動を考える場合，これらの方程式に対する定常解や，進行波解・自己相似解といった特殊解をみつけ，それらの安定性を議論するといった解析が行われる．本講演では，それらのトピックの一つを紹介する予定である．