講演者: 宮本 安人（東京大学大学院数理科学研究科）

題目: 一般化スケール変換による極限方程式とその応用

概要: 半線形楕円型方程式$\Delta u + f(u) = 0$を考える．物理現象のモデル方程式や増大する非線形項の典型的な例として，

$$\Delta u + u^p = 0 \qquad \text{と} \qquad \Delta u + e^u = 0$$

は，これまで多くの研究がなされてきた．方程式はシンプルでありながら，様々な興味深い構造を持つことが現在では知られている．一方，$\Delta u + u^p(\log(u+1))^q = 0$や，$\Delta u + \exp(\exp(u^p)) = 0$など，増大する一般的な非線形項を持つ方程式については，$\Delta u + u^p = 0$や$\Delta u + e^u = 0$の場合と同じスケール不変性が成り立たないため解析が困難であった．

近年，新しいスケール変換（一般化スケール変換）が発見された：

$$v(s) := F^{-1}\left[\frac{1}{\lambda^2}F\left[u(r)\right]\right], \qquad s := \frac{r}{\lambda},$$

ここで，

$$F[u] := \int_u^\infty \frac{dt}{f(t)}.$$

このスケール変換は，藤嶋陽平氏（静岡大学）によって，対応する放物型方程式$\partial_t u = \Delta u + f(u)$の爆発問題を研究している過程で発見された．

講演では，このスケール変換による極限方程式が適当な仮定の下で，

$$\Delta v + f(v) + \frac{q - F(v)f'(v)}{F(v)f(v)}|\nabla v|^2 = 0$$

となることを見る．ここで，qはfから定まる定数で，1以上となることが知られている．極限方程式の解の構造を調べることにより，元の方程式の解の構造が分かる．極限方程式の形は，一見すると複雑に見えるが，別の技巧的な変数変換

$$w(s) := F_q^{-1}\left[F(v(s))\right],$$

$$F_q[v] := \int_v^\infty \frac{dt}{f_q(t)}, \qquad f_q(v) := \begin{cases} v^{q/(q-1)}, & \text{if } q > 1 \\ e^v, & \text{if } q = 1, \end{cases}$$

によって，（驚くべきことに）$q > 1$の場合は$\Delta w + w^{q/(q-1)} = 0$，$q = 1$の場合は$\Delta w + e^w = 0$に変換されることを見る．このことにより，（ほぼ任意の）増大する非線形項を持つ方程式の解の構造は，標準的な2つの方程式 $\Delta w + w^p = 0$と$\Delta w + e^w = 0$の解の構造に近いことが示唆される．

これらの関係を用いて，球領域における増大する一般的な非線形項を持つ方程式のDirichlet問題 $\Delta u + \lambda f(u) = 0$の分岐構造を考察する．