Dynamical approach to an overdetermined problem

小野寺 有紹 (東京工業大学)

$\mathbb{R}^n$ 内に与えられた測度 (質量分布) に対し, それと同じ重力場を生成する超曲面は存在するか？この単純な問いは楕円型偏微分方程式の過剰決定問題として定式化される．すなわち, コンパクトな台をもつ有限 Borel 測度 μ に対し, μ の台を含むある領域 Ω で

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu & (x \in \Omega), \\ \quad\; u = 0 & (x \in \partial\Omega), \\ -\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 1 & (x \in \partial\Omega) \end{cases}$$

をみたす解 u が存在するとき, $\partial\Omega$ が求める超曲面となる．

このような Ω (したがって u) の構成方法は幾つかあり, その代表的な方法として優解劣解法, 変分法, および陰函数定理が挙げられる．特に変分法によって μ が Dirac 測度 δ_0 にある意味で十分に近い場合の Ω の存在が示される．しかしながら, 対応する (無限次元空間上の) 汎函数の形状が非自明であることから, そのような領域 Ω の一意性は変分法から直接導くことは困難である．実際, μ が異なる点に台をもつ二つの Dirac 測度からなる場合は, その二点間の距離によって臨界点を二つもつ場合がある．同様に, 優解劣解法や陰函数定理による方法でも一意性を得る方法論は確立しておらず, 一意性の結果は μ が対称性をもつ場合や領域 Ω に凸性などの幾何的制約条件を課したものに限られていた．

本講演では第 4 の構成方法として発展方程式を用いた方法を紹介する．これは測度が δ_0 である場合に対応する領域が球であることを用いて, δ_0 を μ へと連続的に変形していくときの領域の変化を追うものである．この領域変化を記述する発展方程式を導出し, それを解くことで μ に対応する領域 Ω が構成される．また, この方法を用いると, 同様に測度 $\mu(t) = \mu + t\delta_0$ $(t > 0)$ に対応する単調に増大する領域 $\Omega(t)$ の族が得られ, それが $\mathbb{R}^n$ を被覆する．この事実と最大値原理を組み合わせることで, 幾何的制約条件を課すことなく, 測度 μ に対応する領域が Ω 以外にはあり得ないことを示すことができる．講演では上記の結果の大雑把なアイディアを中心に, より複雑な構造を有する過剰決定問題である Bernoulli 問題について最近得られた結果も時間が許せば紹介したい．