大きな指数を持つ 2 次元 Hénon 方程式の最小エネルギー解の最大点について

高橋太（大阪市立大・理）

Ω を原点 0 を含む $\mathbb{R}^2$ の滑らかな有界領域とし、定数 $p > 1$, $\alpha \geq 0$ に対して次の楕円型境界値問題を考察する：

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = |x|^{2\alpha} u^p & x \in \Omega, \\ u > 0 & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Sobolev 埋め込み $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ のコンパクト性により、任意の $p > 1$ に対して、(P) の最小エネルギー解の存在が容易にわかるが、最近、Chunyi Zhao (CPAA,2013) は、最小エネルギー解の $p \to \infty$ での漸近挙動についていくつかの結果を得た。それによると、最小エネルギー解の L^∞ ノルムは $p \to \infty$ の際に無限大にならず、また 0 からも一様に離れている。また $\alpha > e - 1$ の条件のもとで、最小エネルギー解を適当にスケールした関数は Liouville 方程式 $-\Delta u = e^u$ の全域解に漸近し、その最大点は Ω の境界に近づいていく。さらに、 最小エネルギー解は p が十分大きいとき Ω 上で高々 2 点以下の最大点を持つ。

同じ論文の中で Zhao は「最小エネルギー解の最大点は p が十分大きいときにはただ 1 点である」ことを予想として述べているが、この講演では、解の Morse 指数に注目した議論により Zhao の予想が肯定的に解けることを報告する。

定理 ([TF] CPAA (2013)) $\alpha > e - 1$ を仮定する。このとき、p が十分大ならば最小エネルギー解 u_p はただ一つの最大点をもつ。

証明は背理法で行われ、$p_n \to \infty$ となるある列に沿って相異なる最大点 $x_{p_n}^i (i = 1, 2)$ が存在したと仮定する。また、$L_p = -\Delta_x - p|x|^{2\alpha} u_p^{p-1}(x) : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ を u_p の回りの線形化作用素とおく。

次の各ステップを組み合わせることで矛盾を得る。

Step 1: 最小エネルギー解 u_p の Morse 指数は 1 以下、つまり、L_p の第 2 固有値 $\lambda_2(L_p, \Omega) \geq 0$ が成り立つ。

Step 2: （背理法の仮定の下で）Ω 内の互いに素な円板 B^i $(i = 1, 2)$ が存在して、n 十分大で $\lambda_1(L_{p_n}, B^i) < 0$ $(i = 1, 2)$ となる。

Step 3: $\lambda_2(L_{p_n}, \Omega) \leq \sum_{i=1}^{2} \lambda_1(L_{p_n}, B^i)$.