２元２次形式の類数とヒルベルトモジュラー群に対するルエル型ゼータ関数

権　寧魯　（九州大学大学院数理学研究院）
YASURO GON　(KYUSHU UNIV.)

1. 講演の概要

整数の集合 $\mathcal{D}$ を以下で定義する.

$$\mathcal{D} := \{d \in \mathbb{Z} \,|\, d \equiv 0,\,1 \pmod 4,\ d \text{ not a square},\ d > 0\}.$$

整数 $d \in \mathcal{D}$ に対して, 判別式 d の原始的２元２次形式の同値類の個数を $h(d)$, 整数の組 (x_d, y_d) をペル方程式 $x^2 - dy^2 = 4$ の基本解とし, $\varepsilon_d := (x_d + \sqrt{d}\,y_d)/2$ とおく. ２次形式の類数 $h(d)$ の漸近的振る舞いに関しては, Gauss, Siegel, 新谷による漸近公式が有名であるが, Sarnak によりモジュラー群 $PSL(2,\mathbb{Z})$ に対するセルバーグゼータ関数の解析的性質とその数論的表示を用いて, 以下の漸近公式が知られている. $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x 1/\log t\,dt$ とおく.

$$\sum_{\substack{d\in\mathcal{D}\\ \varepsilon_d\le x}} h(d)\log\varepsilon_d \sim \frac{x^2}{2}, \qquad \sum_{\substack{d\in\mathcal{D}\\ \varepsilon_d\le x}} h(d) \sim \mathrm{Li}(x^2) \qquad (x\to\infty). \tag{1.1}$$

この講演では, 上記漸近公式の**実２次体の整数環係数の２元２次形式の類数**への一般化がヒルベルトモジュラー群に対するルエル型ゼータ関数の解析的性質と数論的表示から導かれることを説明する. K を類数１の実２次体, $\mathcal{O}_K$ を K の整数環とする. K の元 a に対して, a' で $\mathbb{Q}$ 上の共役元を表すとする. $\mathcal{O}_K$ の部分集合 $\mathcal{D}_{+-}$ を以下で定義する.

$$\mathcal{D}_{+-} := \{d \in \mathcal{O}_K \,|\, \exists b \in \mathcal{O}_K \text{ s.t. } d \equiv b^2 \pmod 4,\ d \text{ not a square in } \mathcal{O}_K,\ d>0,\ d'<0\}.$$

$\mathcal{O}_K$ の元 $d \in \mathcal{D}_{+-}$ に対して, 判別式 d の $\mathcal{O}_K$ 係数, 原始的２元２次形式の同値類の個数を $h(d)$, $\mathcal{O}_K$ の元の組 (x_d, y_d) をペル方程式 $x^2 - dy^2 = 4$ の基本解とし, $\varepsilon_d := (x_d + \sqrt{d}\,y_d)/2$ とおく. （今, K の類数は１と仮定していることに注意.）

Theorem 1.1 (ルエル型ゼータ関数)**.** (1) ゼータ関数 $R_K(s) := \prod_{d\in\mathcal{D}_{+-}}(1-\varepsilon_d^{-2s})^{-h(d)}$ はある右半平面で絶対収束し, $\mathbb{C}$ 全体に有理型に解析接続される. (2) $s=1$ で２位の極をもち, $\mathrm{Re}(s) \ge 1$ において非零となる. (3) $s=0$ で零点をもち, その位数は $2(E(X_K)+1)$ となる. ここで, $E(X_K)$ は K から決まるヒルベルトモジュラー曲面 X_K のオイラー標数である.

Theorem 1.2 (漸近公式)**.**

$$\sum_{\substack{d\in\mathcal{D}_{+-}\\ \varepsilon_d\le x}} h(d)\log\varepsilon_d \sim x^2, \qquad \sum_{\substack{d\in\mathcal{D}_{+-}\\ \varepsilon_d\le x}} h(d) \sim 2\,\mathrm{Li}(x^2) \qquad (x\to\infty). \tag{1.2}$$

Date: 2012 年 1 月 25 日.
東京工業大学・大岡山談話会.