

測地流の転移作用素とゼータ関数

S. Smale は 1969 年の論文で, Selberg ゼータ関数の一つの一般化として, 多様体上の流れに対してゼータ関数を

$$\zeta(s) = \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{\gamma} (1 - e^{-(s+k)|\gamma|}).$$

と定義し, それを研究することを提唱した. (ここで $\prod_{\gamma}$ は全ての素周期軌道 γ についての無限積で, $|\gamma|$ は γ の周期を表す.) その後, Ruelle と Fried はゼータ関数を転移作用素 (流れの関数や微分形式に対する自然な作用) のフレドホルム行列式として書き表すことで, その性質を調べた. 特に C^{∞} 級のアノソフ流について, $\zeta(s)$ は複素平面上の有理型関数に拡張し, その零点や極が転移作用素のスペクトルに対応することを示している.

講演者はここ数年間, 負曲率多様体の測地流を含む接触アノソフ流と呼ばれるクラスの流れについて, 適切な関数空間を設定することでそのスペクトルの情報を取り出すという研究をしてきた. その成果として, ゼータ関数の零点や極の配置についていくつかの結果を得たので報告したい.

この研究をしていて最も不思議に思われることは, 測地流という完全に古典力学の系を扱っているにも関わらず, 半古典解析の手法が極めて有効に働くことである. 特に, 測地流の場合には (上記のゼータ関数を少し変形した) 半古典ゼータ関数の零点が漸近的な意味で元の多様体のラプラス作用素の固有値と関係することが自然に示唆される. この点についての研究は始めたばかりであるが, できれば少し触れたい.