# TWISTED INDEX THEOREM とその幾何的応用

森吉 仁志 (慶應義塾大学理工学部)

1963 年に Atiyah-Singer は，Gauss-Bonnet 定理・Riemann-Roch-Hirzebruch 定理・Thom-Hirzebruch 符号数定理などを謂わば統合する形で，閉多様体上の一般の楕円型微分作用素に対する指数定理を証明した．さらに Atiyah と I. M. Singer は von Neumann 環における「次元」を用いた指数の一般化を行い，無限被覆空間上で指数定理 ($\Gamma$-index theorem) を定式化した．一方 A. Connes は $C^*$ 環の $K$ 理論を用いて，1982 年に葉層多様体上の指数定理を証明した．これは，Atiyah-Singer の族指数定理と $\Gamma$-index theorem を併せた一般化と考えられる．本講演ではそのような一般化の一つである Twisted Index Theorem とその幾何的応用について述べる．

$M$ を偶数次元の閉スピン多様体，$\pi : \widetilde{M} \to M$ を普遍被覆空間とし、$\Gamma = \pi_1(M)$ とおく．ここで $\omega$ を $M$ 上の closed 2-form （$[\omega]$ は必ずしも $H^2(M,\mathbb{Z})$ の元でなくて良い）にとり、分類写像 $f : M \to B\Gamma$ に関して $[\omega] \in \mathrm{Image}[f^* : H^2(B\Gamma;\mathbb{R}) \to H^2(M;\mathbb{R})]$ と仮定する．例えば $\widetilde{M}$ が可縮ならば、このような $\omega$ はいつも存在する．いま $\sigma = e^{2\pi i\sigma_0} : \Gamma\times\Gamma \to U(1)$ という乗法的 2 コサイクルをとると，積束 $L = M \times \mathbb{C}$ 上に $\sigma$ 同伴な $\Gamma$ の射影的作用が定義され，さらにこの作用に関する不変接続 $\nabla$ が存在する．このとき：

**Twisted Index Theorem** (Marcolli-Mathai, Moriyoshi)**.** 直線束 $L$ に係数をもつ *Dirac* 作用素を $D^\nabla$ とすると，

(i) $\sigma$ を用いて捩じった $C^*$ 群環 $C^*(\Gamma,\sigma)$ の $K$ 群の元として、*Dirac* 作用素の指数 $\mathrm{Ind}\, D^\nabla \in K_0(C^*(\Gamma,\sigma))$ が定まる；

(ii) トレイス $\tau$ が誘導する写像 $\tau_* : K_0(c^*(\Gamma,\sigma)) \to \mathbb{R}$ に関して以下の公式が成り立つ：

$$\tau_*(\mathrm{Ind}\, D^\nabla) = \int_M \widehat{A}(TM)e^{-\frac{\omega}{2\pi}}$$

**Corollary 1.** シンプレクティック閉多様体 $M$ が *aspherical,* 即ちその普遍被覆空間が可縮ならば，$M$ は正スカラー曲率をもつリーマン計量を許容しない．

この結果は，任意の closed aspherial manifold は正スカラー曲率をもつリーマン計量を許容しないだろうという Gromov-Lawson 予想の部分的解決になっている．

**Corollary 2.** ケーラー多様体 $N$ の普遍被覆 $\pi : \widetilde{N} \to N$ 上で $\pi^*\omega$ : が *exact* と仮定する．このとき任意の閉ケーラー部分多様体 $M \subset N$ に関して $(-1)^n Td(M) \geq 0$ が成り立つ．ただし $\dim_{\mathbf{C}} M = n$ である．

これは以下の Green-Lazarsfeld, Kollár 等の結果と重なる．

**Theorem 3** (Green-Lazarsfeld, Kollár)**.** $M$ を $n$ 次元複素多様体とする．ここで $n$ 次元 *Abelian variety* $A^n$ への *generically finite morphism* $f : M \to A$ が存在するならば、$(-1)^n\mathrm{Td}(M) \geq 0$ である．