

Random Schrödinger 作用素のスペクトルについて

小谷眞一（大阪大学）

V を $\mathbb{R}^d$ 上の実数値関数として Schrödinger 作用素

$$H = -\Delta + V \text{ in } L^2(\mathbb{R}^d)$$

を考える。この作用素は $L^2(\mathbb{R}^d)$ で自己共役作用素として実現され、ポテンシャル V の下での 1 粒子の量子力学的な運動を記述する。したがってそのスペクトルは実軸上の非有界な閉集合であり、その構造が考察している物質の電気伝導度、あるいは作用素に磁場を入れた場合には磁性などの物性を決定する。原子核の周りを運動する電子の運動の場合には V は遠方では減衰する関数であり、ポテンシャルに拘束されない自由の場合の摂動としてさまざまな側面から研究されている。この場合スペクトルは一正の部分では絶対連続になり、負の部分では離散的になる。一方、完全結晶中の遍歴電子の運動であれば V は周期関数と仮定されるが、この場合スペクトルは全領域で絶対連続になる。ところどころに空隙 (gap) が現れるが、スペクトルのバンド構造 (Bloch 理論) が結晶の物性を決定する。しかし、完全結晶ではなく不純物が混入している場合または結晶構造そのものが崩れている場合には V はランダムと仮定される。この場合のスペクトルの構造を問題とするが、もはや摂動論あるいは Bloch 理論は適用できないので数学理論上困難が伴う。この講演では空間が 1 次元の場合に主に焦点をあて、状態密度関数あるいは Floquet 指数と呼ばれる特性量がどれだけスペクトルは決めていくかについてお話する。結果的には、状態密度関数は絶対連続スペクトルと特異スペクトルを完全に決定していることがわかる。この応用として 1 次元格子上の概 Matheiu 作用素のスペクトルの決定問題に触れる。また、自然に生じる数学的な問題として、状態密度関数あるいは Floquet 指数からランダムポテンシャルを決定するというスペクトル逆問題が考えられるが、この問題についての定式化と問題点および展望について述べる。