東工大談話会（６月２７日）アブストラクト

Hénon 写像の力学系に関する幾つかの話題

石井　豊

九州大学大学院数理学研究院

この講演では, $\mathbb{R}^2$ あるいは $\mathbb{C}^2$ の多項式自己同型である **Hénon 写像**：

$$f_{c,b} : (x, y) \longmapsto (x^2 + c - by, x),$$

さらに, より一般的な**一般化 Hénon 写像**：

$$f_{p,b} : (x, y) \longmapsto (p(x) - by, x)$$

のなす実および複素力学系について, その歴史や背景から現在の研究の状況に至るまでの, 幾つかのトピックスを選んでお話ししたい. 以下はその概要である.

(1) そもそもこの Hénon 写像は, カオス的な振舞いが初めて発見された常微分方程式系の一つである Lorenz 方程式 (1963) に対し, その Poincaré 切断の力学系的性質を抽出し代数的に単純化して得られたものである. 実際, $(c, b) = (-1.4, -0.3)$ に対して $f_{c,b}$ が「奇妙なアトラクタ (strange attractor)」を持つことが数値的に観察された (M. Hénon, 1976). この種の観察に対して数学的に厳密な裏付けがなされたのは比較的最近 (M. Benedicks–L. Carleson, 1991) になってからであり, しかもその証明は至極複雑かつ難解である.

(2) $\mathbb{R}^2$ あるいは $\mathbb{C}^2$ の多項式自己同型全体のなす群の中で力学系として非自明なものは, 有限個の一般化 Hénon 写像の合成と共役になることが知られている (S. Friedland–J. Milnor, 1989). 証明には２変数多項式自己同型に関する Junge の定理 (1942) が用いられるが, その自然な３次元化に対しては Nagata 写像 (1972) とよばれる $\mathbb{C}^3$ の多項式自己同型が反例になることが最近証明された (I. P. Shestakov–U. U. Umirbaev, 2004).

(3) また歴史的には, このような多項式自己同型の力学系は, いわゆる Fatou–Bieberbach 領域の構成にも用いられた (1920 年代頃から). 具体的には $\mathbb{C}^2$ の Hénon 写像の吸引鉢として Fatou–Bieberbach 領域を構成するのだが, 近年の複素力学系理論を用いると, その領域の境界は (大抵の場合) 位相多様体にさえならず, トポロジーで有名な「和田の湖」のように病的な状況になることがわかっている (E. Bedford–J. Smillie, 1991).

(4) Hénon 写像はパラメータ (c, b) を含んでいる. (c, b) を動かすと $f_{c,b}$ の力学系がどのように変化するか (分岐現象) を解析したり, パラメータ空間の構造を調べたりすることは重要な問題である. この分岐現象を研究する上で骨格となるのが「双曲性」とよばれる良い性質を持つ力学系である. ところが今まで, 双曲的 Hénon 写像の例は１変数多項式の小さな摂動として得られるものしか知られておらず (Fornæss–Sibony, 1992; Hubbard–ObersteVorth, 1995), 真に２次元的振舞いを示す双曲的 Hénon 写像の存在は過去に知られていなかった.

講演者は最近, 以下の主張を証明した.

定理. ３次の Hénon 写像 $f_{a,c} : (x, y) \mapsto (-x^3 + a - by, x)$ で $(a, b) = (-1.35, 0.2)$ とした力学系は双曲的であり, しかもどんな双曲的１変数多項式の小さな摂動とも共役でない.

なお, 今回の講演の内容は, 引き続く集中講義への導入の役割も兼ねるようにお話しするつもりです.