

東工大談話会 FUKUMOTO-FURUTA 不変量と
その 3,4 次元多様体への応用

上 正明
京都大学大学院理学研究科

3 次元多様体の不変量は数多く定義されているが、ここでは 3 次元多様体の分類よりもそれを境界とする 4 次元多様体のトポロジーを知ることが主眼とした不変量の 1 つとして Fukumoto-Furuta 不変量について述べる。

有理ホモロジー 3 球面 (有理係数ホモロジー群が S^3 のそれと同型) S とその上のスピン構造 c に対し, (S, c) を境界とする 4 次元のスピン V 多様体 (X, c) (ここでの c は X 上のスピン構造で S 上与えられたものに一致する) をとったとき, Fukumoto-Furuta 不変量は

$$w(S, X, c) = -8 \operatorname{ind} \mathcal{D}(X \cup (-Y)) + \sigma(Y)$$

と定義される整数値である。ここで Y は境界が S となるように補助的にとった 4 次元スピン多様体, $\operatorname{ind} \mathcal{D}$ はディラック作用素の指数, σ は符号数を表す。 V 指数定理によればこの値は Y の取り方にはよらず, X の位相的データから容易に計算可能である。一般には $w(S, X, c)$ は X のとりかたには依存するが特別な S に関しては X を「標準的に」とることにより, (S, c) のみの不変量としてよい性質を持つ。典型例は S が特異的な S^1 ファイバー構造をもつザイフェルト多様体の場合であり, 次の結果が成り立つ。

定理 1. S がザイフェルト有理ホモロジー 3 球面のとき, ある X の取り方を指定すると $w(S, X, c)$ は *Neumann-Siebenmann* 不変量と呼ばれる既知の不変量 $\bar{\mu}(S, c)$ に一致し, スピン有理ホモロジーコボルディズム不変になる。

この結果は与えられたザイフェルト有理ホモロジー 3 球面に対し, それを境界とする負定値な交叉形式を持つ 4 次元多様体のトポロジー, 結び目のデーン手術で表されるための条件などへの応用を持つ。

なお余裕があれば Ozsváth-Szabó の Heegaard Floer ホモロジーから定義された不変量の同様な問題への応用との比較 (この不変量と Fukumoto-Furuta 不変量との関係は明らかではないが) についても述べたい。

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KYOTO UNIVERSITY, KYOTO, 606-8501,
JAPAN