離散群に対する固定点定理

名古屋大学 多元数理科学研究科
納谷 信

離散群の非正曲率距離空間 (CAT(0) 空間) への等長的作用を考えるとき, 任意のそのような作用が必ず固定点をもってしまうということがある. この講演では, この現象の古典的な例から始めて, 最近の結果 (Gromov および井関裕靖氏と講演者による) まで述べる.

Γ を有限生成群とし, (Y, d) を距離空間とする. $\rho : \Gamma \to \mathrm{Isom}(Y, d)$ を準同型とすると, Γ は $y \mapsto \rho(\gamma)(y)$ によって Y に等長的に作用する. 以下, ρ のことを等長的作用とよぶことにする. 上に述べた現象の古典的な例として, 次の諸結果が知られている.

1. Kazhdan の性質 T をもつ群のヒルベルト空間への任意の等長的作用は固定点をもつ (Delorme, 1977). 逆も成り立つ (Guichardet, 1977).
2. 性質 T をもつ群の $\mathbb{R}$ 樹木への任意の等長的作用は固定点をもつ (綿谷, 1981).
3. 超剛性定理 (Margulis, 1974).

我々の結果の特別な場合を述べる.

定理. X を局所有限な単体複体で, 各頂点のリンクの離散的ラプラシアンの最小正固有値が $1/2$ より大きいものとする. Γ を有限生成群で X に単体的, 固有不連続かつココンパクトに作用するものとし, Y を完備かつ単連結な非正曲率リーマン多様体とする. このとき, Γ の Y への任意の等長的作用 $\rho : \Gamma \to \mathrm{Isom}(Y)$ は Y に固定点をもつ.

Y はヒルベルト多様体でもよく, 上述した Delorme の結果の自然な一般化が得られることになる. また, 定理におけるような Γ は, 完備な非正曲率リーマン多様体の基本群にはなり得ないことが分かる. これにより, Gromov が 1993 年に提出した「有限生成でコホモロジー次元が有限な群は, 必ずある完備非正曲率リーマン多様体の基本群になるか？」という問題に否定的解答が与えられる. (Γ の例としては $PGL(n, \mathbb{Q}_p)$ $(n \geq 3)$ のココンパクト格子がある.)

定理は, Y がヒルベルト空間の場合には Ballmann-Świątkowski, Żuk (1997) によって証明されており, そこでは X 上の ρ 同変な 1 コチェインに対するボホナー型公式が用いられる. 我々の証明は, X から Y への ρ 同変写像に対するこの公式の非線型類似を用いることによってなされる. 微分 1 形式に対する松島の公式は, 対称空間において通常のボホナーの公式をある意味で精密化したものである. 松島の公式の非線型類似と調和写像の存在を用いて種々の超剛性定理を証明する研究が Corlette, Gromov-Schoen, Mok-Siu-Yeung, Jost-Yau (1991–1993) 等によってなされている.