# ループ空間の de Rham 理論とその応用

河野俊丈（東京大学大学院数理科学研究科）

多様体上の基点をもつループ全体の空間をループ空間とよぶ．ループ空間の上の解析学の考察は多様体の大域変分法に由来するものである．ループ空間のさまざまな幾何学的性質の研究は，代数的位相幾何学の重要な対象であるとともに，弦理論など数理物理の分野でも興味が持たれている．この講演では，ループ空間の de Rham 理論に重点をおいて，その歴史的な発展の経緯と主な応用を述べ，さらに Frederick Cohen と講演者の共同研究による，点の配置空間のループ空間に関する最近の発展にふれたいと思う．

ループ空間の de Rham コホモロジー群の構造は，1980 年代に K.T.Chen によって微分形式の反復積分の概念を用いて明らかにされた．特に，多様体 $M$ を単連結と仮定すると，$M$ 上の微分形式から反復積分を用いて構成される $M$ のループ空間 $\Omega M$ 上の微分形式から，$\Omega M$ の de Rham コホモロジーが計算されることが知られている．上の反復積分によって生成される複体は bar complex とよばれる．$M$ が単連結でない場合には 1 次微分形式の反復積分によって $\Omega M$ 上の多くの関数が得られ，bar complex の 0 次元が基本群の降中心列に関する情報を与える．このような手法に端を発するいくつかの発展を以下に挙げてみよう．

1. コンパクト Kähler 多様体のループ空間のコホモロジーの決定 (Deligne, Griffiths, Morgan, Sullivan の formality)

2. 基本群のユニポテント表現をモノドロミーにもつ微分方程式の構成

3. 球面単体の体積の Schläfli の公式とその反復積分表示による，discriminat の補集合上の Aomoto hyperlogarithm の構成

4. 結び目の Kontsevich 積分と多重ゼータ値

とくに，4 は，対数微分形式の反復積分によって，複素平面内の点の配置空間のループ空間上の関数を構成する手法の自然な一般化であり，多重ゼータ値との関連は Drinfel'd associator の反復積分表示により得られる．この講演では，一般の多様体上の点の配置空間のループ空間について，そのホモロジー群および de Rham コホモロジー群の代数構造が組みひも関係式の無限小版によって記述されるという結果を紹介し，その有限型位相不変量などへの応用を述べる．