非交叉拡散過程とランダム行列

種村　秀紀　　　（千葉大学理学部）

$B^{\rm R}_{\rm ij}(t)$, $B^{\rm I}_{\rm ij}(t)$, $1 \le i \le j \le N$ を独立な１次元ブラウン運動としたとき, Dyson [1] は各成分 $\xi_{\rm ij}(t)$ が

$$\xi_{\rm ii}(t) = B^{\rm R}_{\rm ii}(t), \quad 1 \le i \le N, \qquad \xi_{\rm ij}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} B^{\rm R}_{\rm ij}(t) + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} B^{\rm I}_{\rm ij}(t), \quad 1 \le i < j \le N$$

で定まるエルミット行列値過程 $(\xi_{\rm ij}(t))_{1\le {\rm i,j} \le {\rm N}}$ を導入し, その固有値 $\{\lambda_{\rm i}(t)\}$ が Dyson モデル方程式

$$d\lambda_{\rm i}(t) = dB_{\rm i}(t) + \sum_{{\rm k:k}\ne{\rm i}} \frac{1}{\lambda_{\rm i}(t) - \lambda_{\rm k}(t)} dt, \quad 1 \le i \le N$$

をみたすことを示した．ここで, $B_{\rm i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ は独立な１次元ブラウン運動である．Dyson は Dyson モデルが無限の時間区間 $(0, \infty)$ で交叉 (衝突) しないという条件の下での N 個のブラウン運動を表す時間的斉次な拡散過程と一致することも示している．そこで, 非交叉条件を無限の時間区間 $(0, \infty)$ ではなく有限の時間区間 $(0, T]$ で考えると, 非交叉ブラウン運動は時間的非斉次な拡散過程になる．これは１次元拡散過程において３次元ベッセル過程が時間的に斉次でありブラウンミアンダーが時間的に非斉次であることに対応している．時間的非斉次な拡散過程に対応するエルミット行列値過程を与え, その性質について説明する [3, 4].

非交叉ブラウン運動に対する相関関数はパフィアン (Pfaffian) を用いて表すことができる．この表現を用いることにより粒子数 N を無限大にしたときの相関関数の挙動を調べることができる．後半では相関関数のパフィアン表現と相関関数の収束定理について説明し, さらに相互作用を持つ無限個のブラウン粒子系との関係を論じる [2].

ブラウン運動の代わりに, その他の拡散過程に対する非交叉過程を考えることができる．最後に時間があれば, 反射壁ブラウン運動, ベッセル過程, ブラウンミアンダーなどに対する非交叉拡散過程を考え, 対応するエルミット行列値過程を与えその性質を説明する．[5].

参考文献

[1] Dyson, F. J.: A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix, J. Math. Phys. 3 (1962), 1191-1198.

[2] Katori, M, Nagao, T. and Tanemura, H. : Infinite systems of non-colliding Brownian particles, Adv. Stud. in Pure Math. 39 "Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems", 283-306 (2004), (Mathematical Society of Japan, Tokyo); arXiv:math.PR/0301143.

[3] Katori, M. and Tanemura, H. : Functional central limit theorems for vicious walkers, Stoch. Stoch. Rep. 75, 369-390 (2003); arXiv:math.PR/0203286.

[4] Katori, M. and Tanemura, H. : Noncolliding Brownian motions and Harish-Chandra formula, Elect. Comm. in Probab. 8, 112-121 (2003).

[5] Katori, M. and Tanemura, H. : Symmrtry of matrix valued stochastic processes and noncolliding diffusion particle systems, J. Math Phys. 45, 3058-3085 (2004) ; arXiv:math-ph/0402061.