# 筆答専門試験科目（午前）　　　　　　３０ 大修

# 数 学 系　　　　　　時間　９：００～１１：３０

注 意 事 項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題 5 題すべてに解答せよ.
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 3 ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野，幾何分野，解析分野のどれで受けることを希望するかを解答用紙の 1 ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について：$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.

**[1]** 変数 $x$, $y$ に関する 3 次斉次多項式全体のなす $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を $V$ とする．すなわち

$$V = \left\{ ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

このとき $f = f(x, y) \in V$ に対して

$$T(f) = (x + y) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) f$$

と定める.

(1) $T$ は $V$ の線形変換であることを示せ.

(2) $T$ の固有ベクトルから成る $V$ の基底を求めよ.

**[2]** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $\mathbb{R}$ 上の線形写像とし，その階数を $r$ とする．また，

$$S = \{W \subset \mathbb{R}^n \mid W \text{ は } r \text{ 次元部分空間で } f|_W \text{ が単射}\}$$

とする.

(1) $S$ は空でないことを示せ.

(2) $r > 0$ であるとき，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ について, $x \in W + W'$ となる $W, W' \in S$ が存在することを示せ.

**[3]** $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1 \right\},$$
$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1,\ -1 < x < 1,\ -1 < y < 1 \right\}$$

を考える．$X$ の部分集合族 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \{U \subset X \mid (0, 0) \notin U\} \cup \{U \subset X \mid A \subset U\}$$

によって定義する.

(1) $\mathcal{O}$ が開集合系の公理をみたすことを示せ.

(2) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ がハウスドルフ空間ではないことを示せ.

(3) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ がコンパクトであることを示せ.

(4) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が可分ではないことを示せ．ただし, 位相空間が可分であるとは, 稠密な高々可算な部分集合をもつことである.

**[4]** 連続関数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は極限値 $\alpha=\lim_{x\to\infty} f(x)\in\mathbb{R}$ をもつものとする.

(1) $g(t)=\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$ に対し, $\lim_{t\to\infty} g(t)=\alpha$ であることを示せ.

(2) $h(t)=\dfrac{1}{t^2}\displaystyle\int_0^t xf(x)\,dx$ に対し, 極限 $\lim_{t\to\infty} h(t)$ が存在することを示し, その極限値を求めよ.

**[5]** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $C^2$ 級関数とする. 任意の $a\in\mathbb{R}$ に対し, $x<a<y$ かつ $x,y\to a$ のとき

$$\frac{4}{(x-y)^2}\left\{f(x)-2f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f(y)\right\}\to f''(a)$$

が成り立つことを示せ.

筆答専門試験科目（午後）　　　　　　　３０ 大修

# 数 学 系

時間　１３：００～１５：００

注 意 事 項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち 2 題を選択して解答せよ.
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 4 ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野, 幾何分野, 解析分野のどれで受けることを希望するかを解答用紙の 1 ページ目の受験番号の下に書くこと.（午前と同じ分野を書くこと.）

記号について:

$\mathbb{N}$ は正の整数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.　　$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

**[1]** $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{-1}\right)$ とする.

(1) $K/\mathbb{Q}$ はガロア拡大であることを示し, そのガロア群を求めよ.

(2) $K/\mathbb{Q}$ のすべての中間体を求めよ.

**[2]** 有理数係数の 2 変数多項式環 $\mathbb{Q}[x,y]$ を単項イデアル $(y^2 - x^3 - 1)$ で割った剰余環 $A = \mathbb{Q}[x,y]/(y^2 - x^3 - 1)$ を考える. $f \in \mathbb{Q}[x,y]$ の $A$ における像を $\overline{f}$ と記す.

(1) $P = \left(\overline{x}, \overline{y+1}\right)$ は $A$ の極大イデアルであることを示せ.

(2) $\overline{x}$ は $A$ の素元ではないことを示せ.

(3) $\overline{x}$ は $A$ の既約元であることを示せ.

**[3]** (1) $V = \left\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; {z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2 = 0,\ |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 2\right\}$ が 3 次元 $C^\infty$ 級多様体になることを示せ.

(2) 行列式が正である 3 次実直交行列全体の集合 $SO(3)$ は 3 次実正方行列全体の集合 $M_3(\mathbb{R})$ の 3 次元部分多様体である. これをみとめて (1) の $V$ と $SO(3)$ は微分同相であることを示せ. ただし, $M_3(\mathbb{R})$ は成分をとることにより $\mathbb{R}^9$ と同一視している.

**[4]** $S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ の $\mathbb{R}^3$ への包含写像を $\iota$ とし, $\mathbb{R}^3$ 上の 2 次微分形式

$$\Omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$$

を考える.

(1) $\iota$ による引き戻し $\omega = \iota^*\Omega$ が $S^2$ 上のいたるところ 0 でない微分形式であることを示せ.

(2) 外微分 $d\Omega$ を計算せよ.

(3) 3 次実直交行列 $A$ の定める線形写像 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ から誘導される $C^\infty$ 級写像 $f_A : S^2 \to S^2$ に対して $\left|\int_{S^2} f_A^*\omega\right|$ を計算せよ.

**[5]** 以下,

$$I = \{t \in \mathbb{R} \mid -1 \le t \le 1\},$$
$$A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x_1+1)^2 + {x_2}^2 = 1\right\} \cup \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x_1-1)^2 + {x_2}^2 = 1\right\}$$

のそれぞれに $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ の通常の位相に関する相対位相を与えて位相空間と考える．$A \times I$ の二項関係 $\sim$ を

$$((x_1, x_2), t) \sim ((x_1', x_2'), t') \iff ((x_1, x_2), t) = ((x_1', x_2'), t') \text{ または}$$
$$\text{「}\{t, t'\} = \{-1, 1\} \text{ かつ } (x_1', x_2') = (-x_1, -x_2)\text{」}$$

によって定義する．

(1) $\sim$ が $A \times I$ の同値関係であることを示せ．

(2) $A \times I$ の整係数ホモロジー群を求めよ．

(3) 商空間 $X = (A \times I)/\sim$ の整係数ホモロジー群を求めよ．

**[6]** $a > 0$ を定数とする．このとき以下を示せ．ただし, $R > 0$ で

$$L_-(R) = \{-R + it \in \mathbb{C} \mid 0 \le t \le a\},$$
$$L_+(R) = \{R + it \in \mathbb{C} \mid 0 \le t \le a\}$$

である．また $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$ は用いてよい．

(1) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{L_-(R)} e^{-z^2/2}\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{L_+(R)} e^{-z^2/2}\,dz = 0.$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} \cos ax\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a^2/2}.$

**[7]** 以下, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし, $\mu(X) < \infty$ とする．

(1) $f : X \to \mathbb{R}$ を可測関数, $k$ を正の実数, $\lambda$ を正の実数とする．このとき

$$e^{\lambda k} \mu\left(\{x \in X \mid f(x) > k\}\right) \le \int_X e^{\lambda f(x)}\,d\mu(x)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ をボレル集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $k$ を正の実数, $d\mu(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$ とする．このとき

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{R} \mid x > k\}\right) \le e^{-k^2/2}$$

が成り立つことを示せ．ただし, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$ は用いてよい．

[8] 常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} x'' + 4x' + 5x = f(x, x'), \\ x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1 \end{cases}$$

について以下の問いに答えよ．ただし，$x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ とする．

(1) $f = 0$ であるとき解 $x(t)$ を求めよ．

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が $C^1$ 級で $f(0,0) = 0$ および $\nabla f(0,0) = (0,0)$ をみたすとき，$(0,0) \in \mathbb{R}^2$ のある近傍 $U$ が存在して，$(x_0, x_1) \in U$ ならば $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ となることを示せ．ただし，解 $x(t)$ が $0 \leq t < \infty$ で存在することは仮定してよい．