２８ 大修

専門科目（午前）

数学　　　　時間　9：００〜１１：３０

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題５題すべてに解答せよ.
3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で３ページからなる.
6. 口頭試問を代数系，幾何系，解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の１ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について：$\mathbb{R}$ は実数全体を表し，$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

[1] n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して写像

$$D_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$$

を

$$D_A(X) = AX - XA, \qquad X \in M_n(\mathbb{C})$$

で定める.

(1) D_A が線形写像であることを示せ.

(2) $D_A(XY) = D_A(X)Y + XD_A(Y)$ を示せ.

(3) $n = 3$ で

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のとき，$\mathrm{Ker}(D_A)$ と $\mathrm{Im}(D_A)$ の次元を求めよ.

[2] n を正の整数とし，n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ を

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (|i-j| \leq 1) \\ 0 & (|i-j| > 1) \end{cases}$$

によって定義する.

(1) $\det(A)$ を求めよ.

(2) n が奇数のとき，A が 1 を固有値に持つことを示せ．さらに，このとき固有値 1 に属する固有空間を求めよ.

[3] $\mathbb{R}$ の部分集合族 $\mathcal{O}$ を次で定める:

$$\mathcal{O} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}.$$

(1) $\mathcal{O}$ は開集合系の公理を満たすことを示せ.

(2) 区間 $(-\infty, 0)$ および $(-\infty, 0]$ は位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ のコンパクト部分集合か．理由をつけて答えよ.

(3) 和集合 $(0,1) \cup (2,3)$ は位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ の連結部分集合か．理由をつけて答えよ.

(4) f を $\mathbb{R}$ を定義域とする実数値関数とし, 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ から位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ への写像とみなす．写像 f が連続ならば f は単調増加であることを示せ．ただし, 実数値関数 f が単調増加であるとは，$x \leq x'$ のとき $f(x) \leq f(x')$ が成り立つときをいう.

[4] 実数 $p,\ q$ に対して

$$f_{p,q}(x) = \begin{cases} |x|^p |\sin x|^q & (0 < |x| < 1) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とおく．このとき，次の問に答えよ。

(1) $f_{p,q}$ が $x = 0$ で連続になるような $p,\ q$ の条件を求めよ．

(2) $f_{p,q}$ が $x = 0$ で微分可能になるような $p,\ q$ の条件を求めよ．

(3) 広義積分

$$\int\int_D f_{p,q}(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

が収束するような $p,\ q$ の条件を求めよ．ただし $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0,\ x^2+y^2 < 1\}$ である．

[5] f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数列，g_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を $[0,1]$ 上で定義された連続関数列とする．さらに，f_n は $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に $n \to \infty$ で $\mathbb{R}$ 上一様収束しているとし，g_n は $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ に $n \to \infty$ で $[0,1]$ 上一様収束しているとする．

(1) 実数列 $a_n \in \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が $n \to \infty$ で $a \in \mathbb{R}$ に収束しているとする．$\lim_{n\to\infty} f_n(a_n) = f(a)$ を示せ．

(2) 合成関数 $f \circ g_n$ は $f \circ g$ に $n \to \infty$ で $[0,1]$ 上一様収束することを示せ．

(3) $f_n \circ g_n$ は $f \circ g$ に $n \to \infty$ で $[0,1]$ 上一様収束することを示せ．

２８ 大修

専門科目（午後）

数学　　時間　１３：００〜１５：００

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち２題を選択して解答せよ.
3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で３ページからなる.
6. 口頭試問を代数系，幾何系，解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の１ページ目の受験番号の下に書くこと.（午前と同じ系を書くこと.）

記号について：

$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.

[**1**] 有限群 G の位数を n とし，G の共役類全体を $C(1), \cdots, C(r)$ とする．

(1) $i = 1, \cdots, r$ に対して $C(i)$ に属する元の個数を $n(i)$ とおくと，$n(i)$ は n の約数であることを示せ．

(2) $l(i) = n/n(i)$ とおくとき，

$$\frac{1}{l(1)} + \cdots + \frac{1}{l(r)} = 1$$

を示せ．

(3) $r = 1, 2, 3$ となる G の位数 n を全て求めよ．

[**2**] p を素数とする．元の個数が p^2 の可換環を同型を除いて全て求めよ．ただし可換環は単位元を持つものとする．

[**3**] 次で定義される $\mathbb{R}^4$ の部分集合

$$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1,\, xw - yz = 0\}$$

を M とする．

(1) M は $\mathbb{R}^4$ の部分多様体になることを示せ．

(2) F を $\mathbb{R}^4$ 上の関数で第一座標を対応させるものとし, F を部分多様体 M 上に制限して得られる M 上の関数を f とする．f の臨界点をすべて求めよ．

[**4**] 2 次元球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を考え, S^2 から $\mathbb{R}^3$ への自然な包含写像を $\Phi \colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ とおく．

(1) $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ 上の 2 次微分形式

$$\omega = (xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

を考える．このとき ω は $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ 上の閉形式であることを示せ．

(2) ω の Φ による引き戻し $\Phi^*\omega$ の S^2 上の積分の絶対値 $\left| \int_{S^2} \Phi^*\omega \right|$ を計算せよ．

(3) ω は $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ 上の完全形式であるかどうか, 理由をつけて答えよ．

[**5**] 集合 $N = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, -1/2 \leq x \leq 1/2,\, 0 \leq y \leq 1 \,\}$ に $\mathbb{R}^2$ の通常の位相から誘導される相対位相を与える．$|x| \leq 1/2$ となる各実数 x に対して N の点 $(x, 0)$ と $(-x, 1)$ を同一視することによって N の商空間 A を定める．$(x, y) \in N$ の同値類を $[x, y] \in A$ と表す．

(1) A の整係数ホモロジー群を求めよ．

(2) 任意の $y \in [0, 1]$ に対して, 積空間 $A \times \{\, 0, 1 \,\}$ の点 $([1/2, y], 0)$ と $([1/2, y], 1)$ を同一視し, さらに $([-1/2, y], 0)$ と $([-1/2, y], 1)$ を同一視することによって得られる位相空間を B とする．ただし集合 $\{\, 0, 1 \,\}$ には離散位相を与える．B の整係数ホモロジー群を求めよ．

[**6**] $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ はルベーグ可積分関数 $(\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx < \infty)$ であるとき，$n \in \mathbb{N}$ に対して $g_n(x) = \dfrac{(f(x))^n}{1+(f(x))^n}$ とおく．$\alpha \in (0,1)$ に対して $F_\alpha = \{x : f(x) < \alpha\}$ とおく．ルベーグ可測集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して $|A|$ を A のルベーグ測度とする．

(1) $|\mathbb{R} - F_\alpha| < \infty$ を示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{F_\alpha} g_n(x)\,dx = 0$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx = |\{x : f(x) > 1\}| + \frac{1}{2}|\{x : f(x) = 1\}|$ を示せ．

[**7**] $y(x)$ を初期値問題

$$\begin{aligned} &y'' + y - \beta y^2 = 0, \quad x > 0, \\ &y(0) = \alpha, \quad y'(0) = 0 \end{aligned}$$

の解とする．なお，$\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1]$ に対する大域解の存在と一意性，初期値 α 及びパラメータ β に関する連続性は既知とする．以後 $\beta = 1$ として，以下の問に答えよ．

(1) 各 $\alpha \in (0,1)$ に対してある $z = z(\alpha) > 0$ が存在し，$y(x)$ は $x \in (0,z)$ について単調減少で，$y(z) = 0$ を満たすことを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{\alpha\uparrow 1} z(\alpha) = \infty$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{\alpha\downarrow 0} z(\alpha) = \pi/2$ を示せ．

[**8**]

(1) $f(z)$ を定数でない $\mathbb{C}$ 上の正則関数とする．α を $f(z)$ の位数 k の零点とし，C を α の周りを左回りに一周する円周とする．その半径が十分に小さいとき，

$$k = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

が成り立つことを示せ．

(2) 円 $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i/2| = 1\}$ を左回りする積分路に対し，積分 $I(a) = \displaystyle\int_C \frac{3z^2 - a^2}{z^3 - a^2 z}\,dz$（ただし，$a \notin C$ かつ $-a \notin C$）を考える．この積分値 $I(a)$ がちょうど $4\pi i$ となるような複素数 a の範囲を求め，図示せよ．