２６ 大修

専門科目（午前）

数学　　　時間　9：００～１１：３０

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題５題すべてに解答せよ.
3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で２ページからなる.
6. 口頭試問を代数系，幾何系，解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の１ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について：$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.

[**1**] $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3| x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$ とする．このとき広義積分

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(1+\sqrt{x^2+y^2}+z)^4}$$

の値を求めよ．

[**2**] p は実数とする．$[0,1]$ 上定義された関数列

$$f_n(x)=\frac{n^p x}{1+n^3x^3} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

について次の問に答えよ．

(1) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が全ての $x\in[0,1]$ に対して収束するための p の条件を求めよ．またこのとき，極限関数 $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(2) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $[0,1]$ 上で一様収束するための p の条件を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$ が存在するための p の条件を求めよ．

[**3**] 2 次実正方行列全体の成す線形空間を $M_2(\mathbb{R})$ とする． $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ に対して，$M_2(\mathbb{R})$ の線形変換 L_A を $L_A(X)=AXA$ で定めるとき，次の (1), (2) に答えよ．

(1) $M_2(\mathbb{R})$ の基底を 1 組あげよ．

(2) L_A のトレースを求めよ．

(3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}$ のとき L_A の行列式を求めよ．

[**4**] 3 次の実対称行列 A が与えられたとき，$\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ 上の関数 F を

$$F:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\ni \boldsymbol{x}\mapsto F(\boldsymbol{x})=\frac{\langle A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}\in\mathbb{R}$$

で定める．ただし $\langle\,,\,\rangle$ は $\mathbb{R}^3$ の標準的な内積で，$\mathbb{R}^3$ の要素は列ベクトルとみなしている．

(1) $S^2=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\,|\,\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=1\}$ とするとき，$F(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})=F(S^2)$ となることを示せ．

(2) F は最大値，最小値を持つことを示せ．

(3) F の最大値 α と最小値 β が一致しないとき，$F(\boldsymbol{a})=\alpha$, $F(\boldsymbol{b})=\beta$ となる単位ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ をとり，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{c}$ とおく．このときこれらを並べてできる 3 次正方行列 $P=(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ は正則で，$P^{-1}AP$ は対角行列になることを示せ．

[**5**] 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ において，右半開区間全体の集合を $\mathcal{B}$ とする．すなわち，

$$\mathcal{B}=\{[a,b)\,|\,a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}.$$

$\mathcal{B}$ で生成される開集合系を $\mathcal{O}$ とする．このとき，位相空間 $(\mathbb{R},\mathcal{O})$ について次は正しいか．理由をつけて答えよ．

(1) 位相空間 $(\mathbb{R},\mathcal{O})$ はハウスドルフ空間である．

(2) 位相空間 $(\mathbb{R},\mathcal{O})$ は連結である．

(3) 閉区間 $[0,1]$ は位相空間 $(\mathbb{R},\mathcal{O})$ のコンパクト集合である．

２６ 大修

専門科目（午後）

数学　　　時間　１３：００～１５：００

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち２題を選択して解答せよ.
3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で３ページからなる.
6. 口頭試問を代数系，幾何系，解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の１ページ目の受験番号の下に書くこと.（午前と同じ系を書くこと.）

記号について：

$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbb{N}$ は正の整数全体を表す.

[**1**]

(1) 位数 100 の有限アーベル群を分類したい．それぞれの群の invariant factors による直和分解 (位数が順次倍数となるような巡回群の列による直和分解) と，elementary divisors による直和分解（素数べき位数の巡回群による直和分解）との双方を求めよ．そして，それらの群が互いに同型でないことを示せ.

(2) 有限体 $\mathbb{F}_q$ の元を成分とする 3 次正方行列で，行列式が 1 であるものの個数を求めよ.

[**2**] $f_1(x), \cdots, f_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ で生成される $\mathbb{Z}[x]$ のイデアルを $(f_1(x), \cdots, f_n(x))$ で表すものとする．このとき次の問に答えよ.

(1) 剰余環 $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$ の単元を全て求めよ.

(2) $I = (x+3, x^2+1)$ は素イデアルではないことを示せ.

(3) $J = (3, x^2+1)$ は $\mathbb{Z}[x]$ の極大イデアルであることを示し, $\mathbb{Z}[x]/J$ の位数を求めよ.

[**3**] $\mathbb{R}^3$ の部分集合 A, B, C を

$$A = \left\{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leqq x_i \leqq 1\,(i=1,2,3)\right\},$$

$$B = \left\{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -\frac{1}{2} < x_i < \frac{1}{2}\,(i=1,2)\right\},$$

$$C = \left\{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -\frac{1}{2} < x_i < \frac{1}{2}\,(i=2,3)\right\}$$

によって定義する.

$$X = A - (B \cap C), \quad Y = A - (B \cup C)$$

に $\mathbb{R}^3$ の通常の位相に関する相対位相を与え, 位相空間と考える.

(1) X の整係数ホモロジー群を求めよ.

(2) Y の整係数ホモロジー群を求めよ.

[**4**] $\mathbb{R}^3$ 上の C^∞ 級関数 $F(x,y,z)$, $\Phi(x,y,z)$ を次のように定める.

$$F(x,y,z) = z^2 + f(x,y)g(x,y)h(x,y), \qquad \Phi(x,y,z) = x+y,$$

$$f(x,y) = x^2+y^2-16, \qquad g(x,y) = (x-2)^2+y^2-1,$$
$$h(x,y) = (x+2)^2+y^2-1.$$

$M = F^{-1}(0)$ とし, Φ を M に制限して得られる M 上の関数を φ とする.

(1) M は 2 次元 C^∞ 級多様体であることを示せ.

(2) 点 $p \in M$ における M の接空間 T_pM は

$$(\mathrm{grad}\ F)_p = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(p),\ \frac{\partial F}{\partial y}(p),\ \frac{\partial F}{\partial z}(p)\right)$$

の直交補空間であることを示せ．ただし, $T_p\mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ と同一視し, 標準的な内積が与えられているものとする.

(3) C^∞ 級関数 φ の臨界点をすべて求めよ.

[**5**] (1) $r>0,\ \theta\in(0,2\pi)$ に対して，$C_\theta(r)=\{re^{i\phi}\mid 0\le\phi\le\theta\}$ とおく．このとき，$n\ge -1$ なる整数 n に対して

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_\theta(r)} z^n dz$$

を求めよ．ただし，積分路は偏角の増加方向にとる．

(2) $\Delta=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\le 1\}$ とおく．$f(z)$ を Δ を含む領域で有理型で，その極 $p_1,\cdots,p_n$ はすべて Δ の境界 $\partial\Delta$ 上にあり，その位数はすべて 1 で，p_j での留数は α_j であるとする．このとき，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(\partial\Delta)_\varepsilon} f(z)dz$$

を求めよ．ただし，$(\partial\Delta)_\varepsilon=\partial\Delta-\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n}\{z\in\partial\Delta\mid |z-p_j|<\varepsilon\}$ で，積分路は $\partial\Delta$ の正の向きに沿ってとるものとする．

[**6**] $f(x)$ を区間 $[0,\infty)$ 上の可積分な実数値関数とする．以下の (1)〜(3) を示せ．

(1)

$$\int_1^\infty f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty f(x)\left(1-e^{-x^n}\right)dx.$$

(2) 任意の正の整数 n,N に対し，

$$\int_0^N f(x)\left(1-e^{-x^n}\right)dx=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^N f(x)x^{kn}dx.$$

(3) $t>0$ に対して

$$\varphi(t)=\int_0^\infty\frac{f(x)}{x+t}dx$$

とおくとき，$\varphi(t)$ は $(0,\infty)$ 上で C^1-級である．

[**7**] 区間 $[0,\pi]$ 上の境界値問題

$$\begin{cases} -x''(t)=\lambda x(t)+f(t) \quad (0\le t\le\pi),\\ x(0)=x(\pi)=0\end{cases}\tag{B}$$

に対し，C^2 級の解について考える．ただし，λ および f はそれぞれ与えられた実定数および $[0,\pi]$ 上の実数値連続関数である．

(1) λ は $\lambda\notin\{k^2\,|\,k\in\mathbb{N}\}$ を満たす実定数とする．このとき、(B) の解が高々１つであることを示せ．

(2) $\lambda=n^2\ (n\in\mathbb{N})$ かつ $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin nt\,dt\ne 0$ ならば，(B) の解は存在しないことを示せ．

以下，$\{c_k\}_{k=1}^\infty$ を有界数列とする．

(3) $\lambda\notin\{k^2\,|\,k\in\mathbb{N}\}$ かつ $f(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_k\sin kt\ (n\in\mathbb{N})$ であるとき，(B) の解を求めよ．

(4) (3) で得られた解を $x_n(t)$ とおく．$\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty$ は $[0,\pi]$ 上で一様収束することを示せ．