２４ 大修

専門科目（午前）

数学

時間　９：００〜１１：００

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない．
2. 以下の問題３題すべてに解答せよ．
3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ．
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ．
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で２ページからなる．
6. 口頭試問を代数系，幾何系，解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の１ページ目の受験番号の下に書くこと．

記号について：$\mathbb{R}$ は実数全体を表す．

[1] V, W を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間，$f: V \longrightarrow W$ を線型写像，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_l$ を V の元とする．このとき次を証明せよ．

(1) 像 $\mathrm{Im}(f) = f(V)$ は W の線型部分空間である．

(2) 核 $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ は V の線型部分空間である．

(3) f が単射であることと，$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ とは同値である．

(4) $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_l)$ が一次独立ならば，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_l$ は一次独立である．

(5) f が単射のとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_l$ が一次独立ならば，$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_l)$ は一次独立である．

[2] $[0, \infty)$ 上で定義された非負連続関数 f で

$$(*) \qquad \int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$$

となるものを考える．

(1) $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, $f(x_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ となる $\{x_n\}$ が存在することを示せ．

(2) $(*)$ を満たし, $x \to \infty$ のとき 0 に収束しないような f の例をあげよ．

(3) f が $(*)$ を満たし, $[0, \infty)$ 上で一様連続ならば $f(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ が成り立つことを示せ．

[3] $\mathbb{N}$ を正の整数全体の集合とし，$X := \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする．X の部分集合族 $\mathcal{O}$ を次の様に定める: $A \subset X$ について,

$$A \in \mathcal{O} \iff A \subset \mathbb{N},\ \text{または}\ X - A\ \text{は}\ \mathbb{N}\ \text{の有限部分集合}.$$

このとき

(1) $\mathcal{O}$ は開集合の公理をみたすことを示せ．

(2) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間であることを示せ．また, X の交わらない 2 つの閉集合は開集合で分離されることを示せ．

(3) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ はコンパクトか．

(4) $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ を, 通常の位相をもつユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分空間とするとき, $(X, \mathcal{O})$ と Y は同相であることを示せ．

２４ 大修

専門科目（午後）

数学　　　時間　１２：３０～１５：００

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.

2. 以下の問題のうち３題を選択して解答せよ．ただし口頭試問を

   代数系で受けることを希望する者は，問１～問３のうちから少なくとも１題,

   幾何系で受けることを希望する者は，問４～問７のうちから少なくとも１題,

   解析系で受けることを希望する者は，問８～問１１のうちから少なくとも１題,

   を選択する３題の中に入れること.

3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ.

4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.

5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で５ページからなる.

6. 口頭試問を代数系，幾何系，解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の１ページ目の受験番号の下に書くこと.（午前と同じ系を書くこと.）

記号について：

$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.

[**1**] 体 F に対して, 体としての自己同型群を $G_1(F) = \mathrm{Aut}\,(F, +, \times)$ とし, 乗法モノイド（単位半群）としての自己同型群を $G_2(F) = \mathrm{Aut}\,(F, \times)$ とし, 加法群としての自己同型群を $G_3(F) = \mathrm{Aut}\,(F, +)$ とする.

(1) $G_1(F)$ は $G_2(F)$ および $G_3(F)$ の部分群であることを示せ.

(2) 自然数 n に対して, $\varphi(2^n - 1)$ は n の倍数であることを示せ. ただし, $\varphi(m)$ は $1, \ldots, m$ のうちで m と素なものの個数を表すオイラー関数である.

[**2**] A は整域, B は 1 を含むその部分環で, A は B 上整であるとする, すなわち A のどんな元 a に対しても $a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \cdots + b_0 = 0$ となるような自然数 n および B の元 $b_{n-1}, \ldots, b_0$ が存在するとする. このとき, A が体であることと B が体であることとは同値なことを示せ.

[**3**] $\mathbb{Q}$ を有理数体とし，$\zeta = e^{2\pi i/5}$ とする.

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \zeta)/\mathbb{Q}$ の中間体の個数を求めよ.

(2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \zeta)$ の部分体で $\mathbb{Q}$ 上 2 次のものをすべて求めよ.

[**4**] M を 2 次元実射影空間とする. M の元 ℓ を $\mathbb{R}^3$ の原点を通る直線とみて，ℓ と x 軸，y 軸，z 軸のなす角をそれぞれ $\alpha = \alpha(\ell)$, $\beta = \beta(\ell)$, $\gamma = \gamma(\ell)$ とし，

$$f(\ell) = \frac{\cos^2\alpha + 2\cos^2\beta + 3\cos^2\gamma}{1 + \cos^2\beta + 3\cos^2\gamma}$$

とする. このようにして定まる M 上の関数 f が C^∞ 級関数であることを示し，f の最大値と最小値を求めよ.

[**5**]

(1) リー群 G は向き付け可能であることを示せ.

(2) 複素多様体 M は向き付け可能であることを示せ.

[**6**] $D^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$, $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ とする．$\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ に同値関係 $\sim$ を

$$(x,y,t) \sim (z,w,s) \Leftrightarrow (x,y,t) = (z,w,s),\ \text{または}\ \{s,t\} = \{0,1\}\ \text{かつ}\ (x,y) = (z,w)$$

で導入する．

$X := S^1 \times [0,1]/\sim$, $Y := \big(S^1 \times [0,1] \cup D^2 \times \{0,1\}\big)/\sim$ とおき，ともに商位相により位相空間とみなす．ただし，$S^1 \times [0,1]$, $D^2 \times \{0,1\}$ には $\mathbb{R}^3$ の相対位相を入れる．

(1) 整係数ホモロジー群 $H_*(X;\mathbb{Z})$ を求めよ．

(2) 整係数ホモロジー群 $H_*(Y;\mathbb{Z})$ を求めよ．

[**7**] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ 上の領域 $D := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < u < \pi\}$ で定義された写像

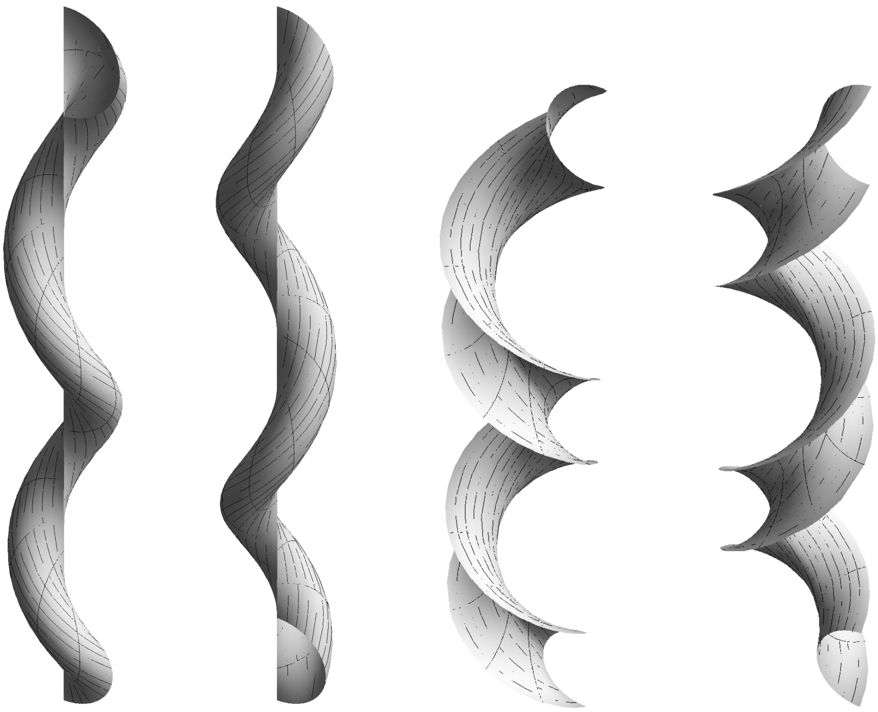
$$p\colon D \ni (u,v) \longmapsto p(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u + v) \in \mathbb{R}^3$$

はユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の曲面のパラメータ表示を与えている．とくに，一つの座標曲線 $\gamma(v) = p(0,v)$ は空間曲線を与えている．

(1) 曲線 $\gamma(v)$ の曲率と捩率を求めよ．

(2) パラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ のガウス曲率が負となるような点は，D のどのような点か．

(3) 下の 4 枚の図のうち，この曲面（写像 p の像）を図示したものはどれか，理由をつけて答えよ．ただし $\mathbb{R}^3$ の座標 (x,y,z) は z 軸を上向きにとる右手系とし，図は uv 平面上の領域 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-2\pi, 2\pi)$ の像を表している．



(a) (b) (c) (d)

[8] $|z|<1$ で定義された正則関数 $f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$ が次の条件を満たすとする.

- $f(0)=1$,
- $|f(z)|\le \dfrac{1}{1-|z|}$.

このとき次の問に答えよ.

(1) $0<r<1$ に対して $|c_n|\le \frac{1}{r^n(1-r)}\quad (n=0,1,2,\ldots)$ が成り立つことを示せ.

(2) $|c_n|\le e(n+1)\quad (n=0,1,2,\ldots)$ を示せ.

(3) $|f(z)-1|\le e\Big\{\frac{1}{(1-|z|)^2}-1\Big\}$ を示せ.

[9] $(X,\mathcal{B},\mu)$ は全測度有限な測度空間とする. f は実数値可測関数で, ある $p>1$ に対して $0<\int_X |f(x)|^p\,d\mu(x)<+\infty$ を満たすとする. $t\in\mathbb{R}$ に対して定義された関数

$$\varphi(t)=\int_X |1+tf(x)|^p\,d\mu(x)$$

を考える.

(1) φ は $\mathbb{R}$ 上で連続でかつ最小値をもつことを示せ.

(2) φ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能であることを示せ.

(3) $\min_{t\in\mathbb{R}}\varphi(t)=\mu(X)$ ならば $\int_X f(x)\,d\mu(x)=0$ であることを示せ. 逆に $\int_X f(x)\,d\mu(x)=0$ ならば $\min_{t\in\mathbb{R}}\varphi(t)=\mu(X)$ であることを示せ.

[10] $L^2(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の複素数値 2 乗可積分関数全体からなる空間とする. $f\in L^2(\mathbb{R})$ に対して, $c_n(f)=\int_n^{n+1}f(y)\,dy\ (n\in\mathbb{Z})$ とし, $\mathcal{L}(f)(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)e^{2\pi inx}\ (x\in[0,1])$ とおく.

(1) $\mathcal{L}(f)$ は $[0,1]$ 上の 2 乗可積分関数であることを示せ.

(2)

$$\sup\left\{\int_0^1 |\mathcal{L}(f)(x)|^2\,dx \mid f\in L^2(\mathbb{R}),\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|^2\,dy\le 1\right\}$$

の値を求めよ.

(3) $(1+x^2)f(x)\in L^2(\mathbb{R})$ ならば $\mathcal{L}(f)(x)$ は C^1 級であることを示せ.

[11] $k(r)$ は $r \geq 0$ について連続な正値関数とする．$\varphi(r)$ $(r \geq 0)$ を，$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ および

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2} \varphi(|x|) = -k(|x|), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$$

を満たす C^2 級の関数とする．

(1) $\varphi(r)$ が満たす常微分方程式を求めよ．

(2) $n = 1$ のとき，$\lim_{r\to\infty} \varphi(r) = -\infty$ を示せ．

(3) $n = 2$ のとき，$\lim_{r\to\infty} \varphi(r) = -\infty$ を示せ．

(4) $n \geq 3$ のとき，$\int_0^\infty rk(r)dr = \infty$ は $\lim_{r\to\infty} \varphi(r) = -\infty$ となるための必要十分条件であることを示せ．