２３ 大修

専門科目（午前）

数学

時間　９：００〜１１：００

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題３題すべてに解答せよ.
3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で２ページからなる.
6. 口頭試問を代数系，幾何系，解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の１ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について：$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.

[**1**]
漸化式 $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ をみたす実数列 $\{x_n\}_{n=1,2,...}$ の全体を V とする．V に属する数列 $\boldsymbol{x} = \{x_n\}$, $\boldsymbol{y} = \{y_n\}$ および実数 α に対して和 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \{x_n + y_n\}$ と $\alpha\boldsymbol{x} = \{\alpha x_n\}$ を定義すると，V は線型空間である．

(1) V に属する数列で，初めの二項が $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ であるものを $\boldsymbol{e}_1$, 初めの二項が $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ であるものを $\boldsymbol{e}_2$ とする．$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ が V の基底となることを示せ．

(2) V の線型変換 f を $f(\{x_n\}) = \{y_n\}$, ただし $y_n = x_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ により定める．線型変換 f の $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ に関する表現行列 A を求めよ．

(3) 表現行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(4) 線型変換 f の固有値と固有ベクトルを求めよ．

[**2**]
(1) $b_n > 0$, $n = 2, 3, \cdots$, とし，$\lim_{n\to\infty}(\log b_n)/(\log n) = \alpha$ とする．$\alpha > 1$ ならば $\sum_{n=2}^{\infty} 1/b_n$ は有限の値に収束することを示せ．

(2) 左開区間 $I = (0, 1]$ 上の実数値連続関数 f を考える．次の命題 (A) と (B) は同値であることを示せ．

(A) f は I 上一様連続である．

(B) 任意の 0 に収束する数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ に対して $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する．

[**3**] 次の各命題について正しければ証明し, 正しくなければ反例をあげよ。

1. 位相空間 X のコンパクト集合 A, B の和集合 $A \cup B$ はコンパクトである。
2. 位相空間 X のコンパクト集合 A, B の共通部分 $A \cap B$ はコンパクトである。
3. 位相空間 X の連結部分集合 A, B が交われば、和集合 $A \cup B$ は連結である。
4. 距離空間 (X, d) と狭義単調増加な C^2 級関数 $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ で

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi''(x) < 0 \quad (\ 0 < x\ )$$

を満たすものに対して

$$d_1(p, q) = \varphi(d(p, q)) \quad (\ p, q \in X\ )$$

とおくと、d_1 は X 上の距離関数になる．

２３ 大修

専門科目（午後）

数学

時間　１２：３０〜１５：００

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない．

2. 以下の問題のうち３題を選択して解答せよ．ただし口頭試問を

   代数系で受けることを希望する者は，問１〜問３のうちから少なくとも１題，

   幾何系で受けることを希望する者は，問４〜問７のうちから少なくとも１題，

   幾何系で受けることを希望する者は，問８〜問１１のうちから少なくとも１題，

   を選択する３題の中に入れること．

3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ．

4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ．

5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で５ページからなる．

6. 口頭試問を代数系，幾何系，解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の１ページ目の受験番号の下に書くこと．(午前と同じ系を書くこと.)

記号について：

$\mathbb{R}$ は実数全体を表す．
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す．

[**1**] G を位数 n の巡回群とし $\mathrm{Aut}(G)$ を G の自己同型群とする．

(1) $\mathrm{Aut}(G)$ がアーベル群であることを示せ．

(2) $G^{\mathrm{Aut}(G)} = \{\, g \in G \mid$ すべての $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ に対して $\sigma(g) = g\,\}$ とおくとき，$G^{\mathrm{Aut}(G)}$ が単位元のみから成る群となるための n の条件を求めよ．

[**2**] 体 K 上の一変数多項式環 $K[X]$ における既約多項式 $f(X)$ と自然数 n に対し，剰余環 $R = K[X]/(f(X)^n)$ の極大イデアルをすべて求めよ。

[**3**] K を体，$\overline{K}$ を K の代数閉包，$\overline{K}$ の二つの 部分体 L, M を K の有限次拡大体とする．

(1) 次の等式

$$[LM : K] = [L : K][M : K] \tag{$*$}$$

が成立するならば $L \cap M = K$ であることを示せ．

(2) K の標数が素数 p であるとする．K 上代数的な元 α で K 上の最小多項式が $X^p - a$ かつ $L = K(\alpha)$ となるものがあるとする．$L \cap M = K$ ならば等式 (*) が成立することを示せ．

[**4**] （1） 2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ に同値関係 $\sim$ を

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z},\, y - y' \in \mathbb{Z}$$

として定義し、商空間を $T = \mathbb{R}^2/\sim$ とする。$\mathbb{R}^2$ の線形変換 A を

$$A(x, y) = (x, y)\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

で定義する。ただし $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ かつ $ps - qr = \pm 1$ とする。
このとき A は T の位相同型 f を誘導することを示せ。
（2） $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とし、対応する位相同型を $f : T \to T$ とする。
$T \times [0, 1]$ において $(u, 0)$ と $(f(u), 1)$ $(u \in T)$ を同一視した空間を X とおく。
X の整係数ホモロジー群を求めよ。

[**5**] （１）$\mathbb{R}^3$ 上の C^∞ 級ベクトル場

$$V = f(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + h(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}$$

と３次微分形式

$$\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$$

に対して、Lie 微分 $L_V\Omega = d(i_V\Omega) + i_V d\Omega$ を計算せよ。ただし i_V は内部積を表す。
（２）S を $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた境界のない２次元コンパクト C^∞ 級多様体とし、M を S で囲まれた有界領域とする。また、S 上の外向きの C^∞ 級の単位法線ベクトル場 N が存在するものとする。S の各点 p で、$i_N\Omega$ を S の接ベクトル空間 $T_p(S)$ に制限したものを σ_p とすることにより得られる S 上の２次微分形式を σ とする。このとき、

$$\int_M \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)\Omega = \int_S \langle V, N\rangle \sigma$$

が成り立つことを示せ。ただし $\langle\, ,\, \rangle$ は通常の内積である。

[**6**] 正の定数 a, b が $a^2 + b^2 = 1$ を満たしているとき、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f を

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto f(u,v) = \left(\frac{a\cos u}{\cosh v}, \frac{a\sin u}{\cosh v}, a(v - \tanh v) + bu\right) \in \mathbb{R}^3$$

で定める。このとき、次の問いに答えよ。
（１）点 $(1,1)$ を含む $\mathbb{R}^2$ の領域 U で $f|_U : U \to \mathbb{R}^3$ がはめ込みを与えるような U のうち最大のものを求めよ。
（２）上の U に対し、はめ込まれた曲面 $f(U)$ のガウス曲率を求めよ。

[**7**] （１）

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

は行列の積に関してリー群であることを示せ。
（２）M 上の３次微分形式で左不変なものをすべて求めよ。

[**8**] $\mathbb{R}^2$ 上の実数値連続関数 f を考える．任意の $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$A_r(x) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|y-x|<r} f(y)dy, \quad r > 0,$$
$$Bf(x) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^2}(A_r(x) - f(x))$$

とする．ただし，任意の $\rho > 0$ に対して $\{r^{-2}(A_r(x) - f(x))\ ;\ 0 < r < \rho\}$ が下に有界でないときは，$Bf(x) = -\infty$ とする．

(1) $x = a$ で f が極小値をとるならば，$Bf(a) \geq 0$ であることを示せ．

(2) $f(x) = x_1^4$ のとき，$Bf(x)$ を求めよ．

(3) さらに

$$M_r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)d\theta,$$
$$Pf(x) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2r^2}(M_r(x) - f(x))$$

とおく．このとき $Pf(x) \leq Bf(x)$ を示せ．

[**9**] $f(x)$ $(x \in [0,1])$ を非負値可測関数とする．$n = 1, 2, \ldots$ に対し，$I_n(f)$ を次で定義する．

$$I_n(f) = n \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)dx \right]^2.$$

(i) f が $[0,1]$ 上で連続であると仮定して，次式を示せ．

$$(*) \qquad \lim_{n \to \infty} I_n(f) = \int_0^1 f^2(x)dx.$$

(ii) f は有界とする．次の事実を用いて $(*)$ を示せ．

任意の $\varepsilon > 0$ に対し，非負値連続関数 g が存在して $\displaystyle\int_0^1 |f(x) - g(x)|dx < \varepsilon.$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx < \infty$ とする．(ii) の結果を用いて $(*)$ を示せ．

［１０］ f を $D = \{|z| < 1\}$ で正則，$\overline{D} = \{|z| \leq 1\}$ で連続な関数とする．$a \in D$ に対し，以下の問に答えよ．

(1) z のべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\overline{a}^n$ が D 上で一様収束することを示せ．さらにこの級数の和を求めよ．

(2)

$$\pi f(a) = \iint_D \frac{f(z)}{(1-a\overline{z})^2}dxdy \quad (z = x+iy)$$

を証明せよ．

［１１］ $f(u)$ は $\mathbb{R}$ 上のリプシッツ連続な関数で，$f(0) = 0$ および，$u > 0$ に対して $f(u) < 0$ を満たすとする．微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dt}u(t) = f(u(t)), \quad u(0) = 1$$

の解 $u(t)$ $(t \geq 0)$ に対して，以下の問に答えよ．

(i) 解 $u(t)$ はすべての $t > 0$ について正の値をとり，$t \to \infty$ のとき $u(t) \to 0$ となることを示せ．

(ii) $\displaystyle\lim_{u \to +0} f(u)/u$ が存在して負の値をとるとき，ある正定数 a, b に対して，

$$e^{-at} < u(t) < e^{-bt}, \quad t \in (0, \infty)$$

が成り立つことを示せ．