専門科目（午前）

数学

時間　９：００～１１：００

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題３題すべてに解答せよ.
3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で２ページからなる.

記号について： $\mathbf{R}$ は実数全体を表す.

[1]

(1) 任意の 2 次実対称行列 A に対して $B^3 = A$ となる実 2 次行列 B が存在することを示せ.

(2) 次の命題は正しいか. 正しければ証明し, 正しくなければ反例をあげよ：任意の実 2 次行列 A に対して $B^3 = A$ となる実 2 次行列 B が存在する.

[**2**]

(1) r を正の定数とする. 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}$$

は $x \in [r, \infty)$ に関し一様収束することを示せ.

(2) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{r \to +0} \int_r^{1/r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}\, dx$$

[**3**] xy 平面の単位円 $S^1 := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ に対して, 写像 $p : S^1 \to [-1, 1]$ を $p(x,y) = x$ で定める. $\mathcal{O} := \{p^{-1}(V) | V$ は $[-1,1]$ の開集合 $\}$ とする. ただし, $[-1,1]$ 上の位相は, $\mathbf{R}$ 上の通常の位相から定まる相対位相を考える.

(1) $\mathcal{O}$ は開集合系の公理を満たすことを示せ.

(2) 位相空間 $(S^1, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間か.

(3) 位相空間 $(S^1, \mathcal{O})$ はコンパクト空間か.

(4) 写像 $f : S^1 \to \mathbf{R}$ が連続であるためには, 連続写像 $g : [-1,1] \to \mathbf{R}$ が存在して $f = g \circ p$ とかけることが必要十分であることを示せ. ただし S^1 上の位相は $\mathcal{O}$ を, $\mathbf{R}$ 上の位相は通常のものを考える.

専門科目（午後）

数学　　　　　時間　１２：３０～１５：００

注意事項:

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち３題を選択して解答せよ. ただし口頭試問を

   代数系で受けることを希望する者は, 問１～問３のうちから少なくとも２題,

   幾何系で受けることを希望する者は, 問４～問６のうちから少なくとも２題,

   解析系で受けることを希望する者は, 問７～問１０のうちから少なくとも２題,

   を選択する３題の中に入れること.
3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で４ページからなる.
6. 口頭試問を代数系、幾何系, 解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の１ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について：

$\mathbf{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbf{C}$ は複素数全体を表す.

[1] G を 2 次ユニタリ行列全体の群，すなわち

$$G = \{g \in M(2, \mathbf{C}) \mid {}^t\bar{g}g = I_2\}$$

とする．そのとき，

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \middle| |t_1| = |t_2| = 1, \quad t_1, t_2 \in \mathbf{C} \right\},$$
$$N = \{g \in G \mid gTg^{-1} \subset T\}$$

に対して

$$N/T$$

を求めよ．

[2] k を標数 0 の体とし，$X_1, \ldots, X_n$ を変数とする．$f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial X_i} \in (f)$$

となるための f の条件を求めよ．

[3] 3 個の元から成る有限体を $\mathbf{F}_3$ で表す．
(1) 変数 X に関する $\mathbf{F}_3$ 上の 2 次既約多項式で最高次の係数が 1 であるものをすべて求めよ．
(2) $\mathbf{F}_3$ 上の多項式

$$f(X) = X^5 - X^4 + X^3 - X^2 - 1$$

を既約多項式の積として表せ．
(3) $f(X)$ の $\mathbf{F}_3$ 上の最小分解体を K とするとき，$K/\mathbf{F}_3$ の Galois 群を求めよ．

[4] 2 次元実射影空間 $P^2(\mathbf{R})$ の同次座標を $[X : Y : Z]$, $\mathbf{R}^3$ の通常の座標を (x, y, z) として

$$M = \{([X : Y : Z], (x, y, z)) \in P^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^3 \mid Xy - Yx = Xz - Zx = Yz - Zy = 0\}$$

とする．
(1) M は $P^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^3$ の 3 次元閉部分多様体であることを示せ．
(2) $\pi \colon M \to \mathbf{R}^3$ を

$$\pi([X : Y : Z], (x, y, z)) = (x, y, z)$$

と定めるとき，各点 $p \in \mathbf{R}^3$ の π による逆像を求めよ．

[5] 種数 3 の向き付け可能な閉曲面を Σ_3 とする.
(1) Σ_3 の整係数ホモロジー群を求めよ.
(2) Σ_3 から 1 点 p を除いた空間 $X=\Sigma_3-\{p\}$ の整係数ホモロジー群を求めよ.
(3) Σ_3 から異なる 2 点 p,q を除いた空間 $Y=\Sigma_3-\{p,q\}$ の整係数ホモロジー群を求めよ.

[6] $\mathbf{C}$ と $\mathbf{R}^2$ の同一視を $x+iy$ と (x,y) を同一視することにより定め, $\mathbf{C}^2$ と $\mathbf{R}^4$ の同一視を $(x+iy,u+iv)$ と (x,y,u,v) の同一視により定める.

$f\colon \mathbf{C}\to\mathbf{C}^2$ を $f(t)=(pt+q\bar{t},rt+s\bar{t})$ により定義する. ただし, $p,q,r,s\in\mathbf{C}$ とする.

$t=t_1+it_2$ とするとき

$$f^*(dx\otimes dx+dy\otimes dy+du\otimes du+dv\otimes dv)=dt_1\otimes dt_1+dt_2\otimes dt_2,$$
$$f^*(dx\wedge dy+du\wedge dv)=dt_1\wedge dt_2$$

の 2 つが同時にみたされるための条件を求めよ.

[7] $\mathbf{R}$ 上の C^1 級実数値連続関数の全体を $C^1(\mathbf{R})$ と表す. 関数列 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}\subset C^1(\mathbf{R})$ に関する次の問に答えよ.
(1) u_j およびその導関数 u_j' がそれぞれ u と v に $\mathbf{R}$ 上で広義一様収束すれば, $u\in C^1(\mathbf{R})$ であることを示せ.

(2) $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ および $\{u_j'\}_{j=1}^{\infty}$ が $\mathbf{R}$ 上一様有界とする. このとき、$\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ の適当な部分列で $\mathbf{R}$ 上広義一様収束するものが存在することを示せ. さらに, そのいかなる部分列をとっても $\mathbf{R}$ 上で一様収束はしない $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ の例をあげよ.

[8] $f_n(x,y)=\dfrac{n}{r\cos\pi r+n^2r^3}\quad(r=\sqrt{x^2+y^2}),$

$$I_n=\int\int_{r\le 1} f_n(x,y)\,dxdy\quad(n\ge 2)$$

とおく. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ を求めよ.

[9] $\mathrm{Re}\,z>0$ に対して

$$f(z)=\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t^2}\,dt$$

とおく. このとき, 以下を示せ.

(1) $f(z)$ を定義する積分は $\mathrm{Re}\, z > 0$ で存在する．

(2) $f(z)$ は $\mathrm{Re}\, z > 0$ で正則である．

(3) $\mathrm{Re}\, z > 0$ で等式

$$f(z+2) = \frac{z}{2} f(z)$$

が成立する．

[10] $C(I)$ を区間 $I = [0,1]$ 上の実数値連続関数全体とし，$(C(I), \|\cdot\|)$ を $C(I)$ に最大値ノルム $\|\cdot\|$ を入れた線形ノルム空間とする．ここで，最大値ノルム $\|\cdot\|$ は $\|f\| = \max\{|f(x)| \mid x \in I\}$ $(f \in C(I))$ と定義する．

(1) $x \in I$ に対して $\delta_x(f) \equiv f(x)$ $(f \in C(I))$ と定義するとき，δ_x は $(C(I), \|\cdot\|)$ 上の有界線形汎関数であることを示せ．さらに，δ_x $(x \in I)$ 達の線形結合とは異なる有界線形汎関数の例をあげよ．

(2) 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(I)$ が $f \in C(I)$ に弱収束するならば各点収束することを示せ．さらに，各点収束はするが，弱収束しない例を与えよ．

(3) I 上のルベーグ測度を λ とおく．一様有界かつ同程度連続な関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(I)$ が，λ に関して L^p 収束 $(p \geq 1)$ するとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は一様収束することを示せ．