専門科目（午前）	１６	大修
数学	時間	9:00-11:00

注意事項:

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題３題すべてに解答せよ.
3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号及び受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で３ページからなる.

記号について:

$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.

$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

[1] n を 2 以上の整数とする．実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して n 次正方行列 A_n を

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

とおく.（対角成分は $a_1, a_2, \ldots, a_n$ で，他の成分はすべて 1.）

(1) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が 1 より大のとき A_n は正定値行列であることを示せ.

(2) $a_1 = \cdots = a_n = a$ のとき A_n の固有多項式および固有値を求めよ.

[2] 集合 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < r \equiv \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$ 上の非負値連続関数 f を考える.

(1) 極限値

$$I(f) = \lim_{t \to +0} \iint_{\{t \leq r \leq 1\}} f(x,y)\,dxdy$$

が存在することを示せ. ただし極限値として ∞ も考える.

(2) (1) で定めた $I(f)$ に対する次の命題 (A), (B), (C) が正しければその証明を, 誤りであれば反例をそれぞれ与えよ.

(A) $I(f) = 0$ ならば D 上で $f \equiv 0$ である.

(B) 定数 $a > -2$ に対して

$$f(x,y) \leq r^a \qquad ((x,y) \in D)$$

ならば $I(f) < \infty$ である.

(C) f が D 上で C^1 級の関数ならば $I(f) < \infty$ である.

[3] ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$ に $\mathbb{R}^2$ のユークリッド距離 $d(x,y) = \|x - y\|$ により位相を入れる.

(1) X の空でない部分集合 B に対し

$$f(x) = \inf_{b \in B} d(x,b)$$

は X 上の連続関数になることを証明せよ.

(2) X の互いに交わらない空でない閉集合 A, B に対し

$$m = \inf_{a \in A,\, b \in B} d(a, b)$$

とおくと $m > 0$ となるか.

(3) (2) において更に A がコンパクトなら $m > 0$ となるか.

専門科目（午後）	１６	大修
数学	時間	12:30-15:00

注意事項:

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち３題を選択して解答せよ. ただし、口頭試問を
   代数班で受けることを希望する人は, 問 1～問 4 のうちから少なくとも 1 題,
   幾何班で受けることを希望する人は, 問 5～問 8 のうちから少なくとも 1 題,
   解析班で受けることを希望する人は, 問 9～問 12 のうちから少なくとも 1 題,
   を選択する 1 題の中に入れること.
3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号及び受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 7 ページからなる.
6. 口頭試問を代数, 幾何, 解析のどの班で受けることを希望するか解答用紙の 1 ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について:

$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

[1]

有限群 G が有限集合 X に

$$G \times X \longrightarrow X \quad : \quad (g, x) \mapsto gx$$

と作用しているとき（このとき X を有限 G-集合と呼ぶ）

$$X^G = \{x \in X \mid \text{すべての } g \in G \text{ に対して } gx = x\}$$

とおく．以下，p は素数とし，有限集合 S に対して $\sharp S$ は S の元の個数を表す.

(1) $\sharp G$ が p のべき $(p^r, r \geq 1)$ のとき

$$\sharp\left(X^G\right) \equiv \sharp X \mod p$$

を示せ.

(2) $\sharp G$ が p の倍数のとき，任意の有限 G-集合 X に対して

$$\sharp\left(X^G\right) \equiv \sharp X \mod p$$

が成り立つか．成り立つならば証明し，成り立たないならば反例を示せ.

[2] A を可換環とする．イデアル $Q \subset A$ が次をみたすとき準素イデアルであるという.「$P = \sqrt{Q}$ が素イデアルであって，$a, b \in A$ に対し $a \cdot b \in Q$, $b \notin P$ ならば $a \in Q$」.

(1) $M \subset A$ が極大イデアルならば，M^n $(n \geq 2)$ が準素イデアルであることを示せ.

(2) $A = \mathbb{C}[x, y, z]/(y \cdot z)$ とする．$\overline{x}, \overline{y} \in A$ で生成されるイデアルを P とする.

(2-1) P が極大イデアルでない素イデアルであることを示せ.

(2-2) P^2 は準素イデアルでないことを示せ.

[3] $\mathbb{Q}(\sqrt{5+2\sqrt{5}})/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大であることを示し，Galois 群を求めよ．またすべての中間体を求めよ.

[4] 位数 360 のアーベル群は同型を除いて何個あるか．さらに，それぞれの同型類に対する単因子を求めよ．

[5]

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R},\ \det x = 1 \right\}$$

とするとき次の各問に答えよ.

(1) $U_i = \{x \in SL(2,\mathbb{R}) |\, x_i \neq 0\}$ とすると $\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$ は $SL(2,\mathbb{R})$ の開被覆になることを示せ. ただし $SL(2,\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$ の部分集合とみて相対位相を入れて考える.

(2) $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^3$ を

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= (x_1, x_2, x_3), & \phi_2(x) &= (x_1, x_2, x_4), \\ \phi_3(x) &= (x_1, x_3, x_4), & \phi_4(x) &= (x_2, x_3, x_4) \end{aligned}$$

で定めるとき, $SL(2,\mathbb{R})$ は $\{(U_i, \phi_i) |\, i = 1, 2, 3, 4\}$ を局所座標系とする可微分多様体の構造をもつことを示せ.

(3) $f : SL(2,\mathbb{R}) \to SL(2,\mathbb{R})$ を $f(x) = x^{-1}$ で与えるとき, f は (2) で与えた可微分構造に関して可微分写像であることを示せ.

(4) $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ を

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_4 - x_2 x_3$$

で定めるとき g の臨界値を求め, $g^{-1}(2)$ が $\mathbb{R}^4$ の部分多様体であることを示せ. さらに $g^{-1}(2)$ と $SL(2,\mathbb{R})$ が微分同相であることを示せ.

[6] $\mathbb{R}^6 = \{(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)\}$ 上のベクトル場

$$Z = -y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial y_3}$$

について

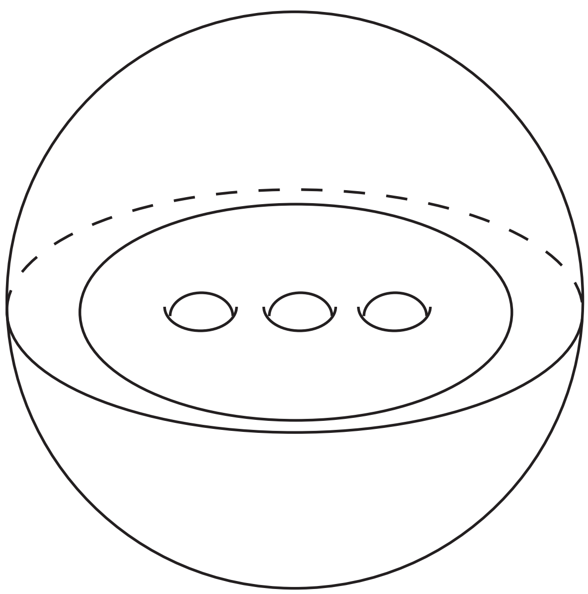
(1) Z の生成する１パラメーター変換群 $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^6 - \{0\}$ の次の同値関係 $\sim$ による商空間を M とする:

$$p, q \in \mathbb{R}^6 - \{0\},\ p \sim q \Longleftrightarrow p = \varphi_t(q) \text{ となる } t \in \mathbb{R} \text{ が存在する.}$$

このとき M は 複素射影空間 $\mathbb{C}P^2$ と半直線 $(0, \infty)$ の直積空間に同相であることを示せ.

[7] 3次元閉球体 $D^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\}$ の内部にある種数3の向き付け可能な閉曲面 S により, D^3 を S の内部と S からなる閉部分空間 N, および S の外部の閉包 $M = \overline{D^3 - N}$ に分ける. M と N の整係数ホモロジー群を求めよ.



[8] M, N を連結な多様体とし $\pi : M \times N \to N$ を射影とする. $M \times N$ 上の p 次微分形式 ω に対し, 次の 2 つの条件は同値であることを証明せよ.

(1) N 上の p 次微分形式 α が存在して

$$\omega = \pi^* \alpha$$

となる.

(2) $\pi_*(X) = 0$ となる $M \times N$ 上の任意のベクトル場 X に対し

$$i(X)\omega = 0, \qquad L_X \omega = 0$$

が成り立つ. ただし $i(X)$ は内部積, L_X はリー微分を表す.

[9] 整数 $n \geq 1$ に対し $\mathbb{R}$ 上の関数 f_n を次式で定める.

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{m^2 + x^2}} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(1) 関数列 $\{f_n\}$ は $\mathbb{R}$ 上のある連続関数 f に一様収束することを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ を示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x f(x)$ を求めよ.

[10] $f(z)$ は $|z| \leq 1$ で正則な関数で $f(0) = 1$ を満たすものとする. $\alpha = f'(0)$ とおく.

(1) 次の積分の値を求めよ.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left\{ 2 \pm \left(z + \frac{1}{z} \right) \right\} f(z) \frac{dz}{z}$$

ただし積分は反時計回りに行なうものとする.

(2) 次の等式を示せ.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta &= \alpha + 2, \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta &= -\alpha + 2. \end{aligned}$$

(3) さらに $|z| \leq 1$ で $\mathrm{Re} f(z) \geq 0$ ならば $-2 \leq \mathrm{Re}\,\alpha \leq 2$ となることを示せ.

[11] 有界な台を持つ $\mathbb{R}$ 上の連続関数全体を $C_K(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可積分関数全体を $L^1(\mathbb{R})$ で表わす.

(1) 次の事実 $(*)$ を用いて $C_K(\mathbb{R})$ は $L^1(\mathbb{R})$ で稠密であることを示せ. ただし $L^1(\mathbb{R})$ はノルム $\|f\| = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ によるノルム空間とみなす.

$(*)$ $A \subset \mathbb{R}$ が有界なルベーグ可測集合であれば, $C_K(\mathbb{R})$ の列 $\{g_n\}$ を $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|1_A - g_n\| = 0$ となるようにとれる. ここで 1_A は A の定義関数である.

(2) $f \in L^1(\mathbb{R})$ とするとき, 次式が成り立つことを示せ.

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)|\sin nx|dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin nx dx = 0.$

[12]

(1) f を $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数, a を実定数とする. このとき次の u に対する常微分方程式の初期値問題の解を求めよ.

$$\begin{cases} u'(x) + u(x) = f(x) & (x \in \mathbb{R}), \\ u(0) = a. \end{cases}$$

(2) u は $\mathbb{R}$ 上の C^1 級実数値関数で, 条件

$$\lim_{x\to+\infty} \big(u'(x) + u(x)\big) = 0$$

を満たすものとする. このとき極限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x)$ を求めよ.