

専門科目（午前）
数学

15 大修
時間 9:00 - 11:00

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題 3 題すべてに解答せよ.
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号及び受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 2 ページからなる.

記号について：

- \mathbb{R} は実数全体を表す.
 \mathbb{C} は複素数全体を表す.

[1] \mathbb{C} に成分をもつ (l, m) 型行列 A および (m, n) 型行列 B を考える (l, m, n は自然数). $T_A: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^l, T_B: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ を A, B から定まる線形写像とする.

- (1) $\text{rank } AB \leq \min(\text{rank } A, \text{rank } B)$ を示せ.
- (2) $\text{rank } AB = \text{rank } A$ となる必要十分条件は

$$\text{Ker}(T_A) + \text{Im}(T_B) = \mathbb{C}^m$$

であることを示せ.

- (3) $\text{rank } AB = \text{rank } B$ となる必要十分条件は

$$\text{Ker}(T_A) \cap \text{Im}(T_B) = \{0\}$$

であることを示せ.

- (4) $l = m = n = 3$ のとき, 次の (i), (ii) が成り立つような A, B の例をそれぞれあげよ.

- (i) $0 < \text{rank } AB = \text{rank } A < \text{rank } B,$
- (ii) $0 < \text{rank } AB < \min(\text{rank } A, \text{rank } B).$

[2] 連続関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x+2) - f(x)) = 3$$

をみたすとき, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ が存在することを示せ. さらにその値を求めよ.

[3] 実数の集合 \mathbb{R} に通常位相をいれ, 有理数の集合 \mathbb{Q} に相対位相を入れる. このとき, 次を証明せよ.

- (1) 部分集合 $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ は \mathbb{R} の閉集合でも開集合でもない.
- (2) A は \mathbb{Q} の閉集合であり開集合でもある.
- (3) 部分空間 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ は \mathbb{R} と同相ではない.
- (4) 部分空間 $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ は \mathbb{Q} と同相である.

専門科目（午後）
数学

15 大修
時間 12:30 - 15:00

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない。
2. 以下の問題のうち3題を選択して解答せよ。ただし、口頭試問を
代数班で受けることを希望する人は、問1～問4のうちから少
なくとも1題、
幾何班で受けることを希望する人は、問5～問7のうちから少
なくとも1題、
解析班で受けることを希望する人は、問8～問10のうちから
少なくとも1題
を選択する3題の中に入れること。
3. 解答は1題毎に別々の解答用紙に記入せよ。
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号及び受験番号を記入せよ。
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で4ページからなる。
6. 口頭試問を代数、幾何、解析のどの班で受けることを希望するか
解答用紙の1ページ目の受験番号の下に書くこと。

記号について：

- \mathbb{Z} は整数全体を表す。
- \mathbb{Q} は有理数全体を表す。
- \mathbb{R} は実数全体を表す。
- \mathbb{C} は複素数全体を表す。

[1] 有限次元複素線形空間 V と、その上の線形変換からなるある集合 G とが与えられているとき、 (G, V) が既約であるとは $\{0\}, V$ 以外に G -不変部分空間が存在しない場合を言う。ここで G -不変部分空間 $W \subset V$ とは、すべての $g \in G$ に対して、 $v \in W$ ならば $g(v) \in W$ が成り立つ部分空間 $W \subset V$ のことである。いま、 (G, V) が既約であり、さらに線形変換 $A: V \rightarrow V$ が G の任意の元と可換であるとする： $A \circ g = g \circ A$ ($\forall g \in G$)。このとき次を示せ。

- (1) 核 $\text{Ker } A$ および像 $\text{Im } A$ は G -不変である。
- (2) A は零写像でなければ、同型写像である。
- (3) A は同型写像であれば、ある複素数 λ が存在して $A = \lambda \text{id}_V$ である。ただし、 id_V は V の恒等変換である。

[2] 素数 p に対して \mathbb{F}_p を p 元体とし

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}, c \in \mathbb{F}_p \right\}$$

とおく。 G は行列の積で群となる。このとき

- (1) G の位数を求めよ。
- (2) G のシロ - p 部分群をすべて求めよ。
- (3) G の元の位数の最大値を求めよ。

[3] 可換環 R の既約な元 x で Rx が素イデアルでないような例をあげ、その理由を述べよ。

[4] 複素数 α, β が有理数体 \mathbb{Q} 上超越的であるとする。このとき複素数体 \mathbb{C} の自己同型 σ で $\sigma(\alpha) = \beta$ をみたすものが存在することを示せ。

[5]

$$M = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

$$T = \{(z_1, z_2) \in M \mid |z_1|^2 = |z_2|^2 = 1/2\}$$

とおき, $\mathbb{C}P^1$ を 1 次元複素射影空間とする. このとき次を示せ.

- (1) T は M の C^∞ 級部分多様体である.
- (2) $M \setminus T$ は 2 つの連結成分からなり, 互いに微分同相である.
- (3) $f: M \rightarrow \mathbb{C}P^1$ を $f(z_1, z_2) = [z_1 : z_2]$ で定める.
 $f|_T$ の像, および $\mathbb{C}P^1$ の各点の逆像は $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ と同相である.

[6] $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とおき, $f_n: S^1 \rightarrow S^1$ を $f_n(z) = z^n$ で定義する ($n \in \mathbb{Z}$). 各点 $(x, 0) \in S^1 \times \{0\}$ は $(f_n(x), 1) \in S^1 \times \{1\}$ に同値であると定義して得られる $S^1 \times [0, 1]$ の商空間を T_n とする. すなわち

$$T_n = S^1 \times [0, 1] / (x, 0) \sim (f_n(x), 1)$$

である.

- (1) T_1 の整係数ホモロジー群を求めよ.
- (2) T_{-1} の整係数ホモロジー群を求めよ.
- (3) T_0 の整係数ホモロジー群を求めよ.
- (4) $n \neq 0, \pm 1$ のとき, T_n の整係数ホモロジー群を求めよ.

[7] (1) n 次実正則行列全体 $GL(n, \mathbb{R}) = \{X = (x_{ij}) \mid \det X \neq 0\}$ はリー群であることを示せ.

(2) n 次実正方行列 $A = (a_{ij})$ を固定する. (x_{ij}) を $GL(n, \mathbb{R})$ の座標とするととき

$$\sum_{i,j,k=1}^n x_{ik} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

は左不変ベクトル場であることを示せ.

[8] $\Omega \subset \mathbb{C}$ を有界領域とする .

$$\mathcal{H} = \{f \mid f \text{ は } \Omega \text{ 上の正則関数, } \|f\|^2 = \int_{\Omega} |f(z)|^2 dx dy < \infty\}$$

とおく . ただし $z = x + iy$ である .

(1) Ω の任意の点 z に対し

$$K(z) = \sup\{|f(z)|^2 \mid f \in \mathcal{H}, \|f\| \leq 1\}$$

は有限であることを示せ .

(2) Ω の各点 z で

$$K(z) = |f(z)|^2 \quad \text{かつ} \quad \|f\| = 1$$

となる $f \in \mathcal{H}$ が存在することを示せ .

[9] (1) $f(x), x^2 f(x)$ が \mathbb{R} 上のルベーク可積分関数ならば

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} (\cos xy) f(y) dy \quad (x \in \mathbb{R})$$

は C^2 -関数であることを示せ .

(2) $f(x), |x|^\alpha f(x)$ ($2 < \alpha < 4$) は \mathbb{R} 上のルベーク可積分ならば

$$\lim_{x \searrow 0} x^{-\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}} (\cos xy - 1 + \frac{x^2 y^2}{2}) f(y) dy \right) = 0$$

を示せ .

[10] (1) f を区間 $[0, 1]$ 上の連続関数とする . 次の境界値問題を解け .

$$\frac{d}{dx} u(x) - 2xu(x) = f(x) \quad (0 < x < 1),$$

$$u(0) = u(1).$$

(2) X を $[0, 1]$ 上の連続関数全体のなすバナッハ空間とする . ただし , そのノルムは $f \in X$ に対し $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ と定める . (1) の境界値問題の解を Gf とあらわすとき , G は X 上の線形有界作用素であることを示せ .

(3) X の任意の有界列 $\{f_1, f_2, \dots\}$ に対し , $\{Gf_1, Gf_2, \dots\}$ の中に X で収束する部分列が存在することを示せ .