平成１３年度東工大大学院試験問題

平成１２年８月２２日　　　実施

専門科目（午前）　数学：9:00–11:30

注意事項：以下の６問から、共通問題１、２、３、すべてに答え、選択問題４、５、６から１題を選択し答えよ。

共通問題 1. 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束し $\lim_{n\to\infty} b_n/a_n = 1$ が成り立つとする．このとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束し

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=n}^{\infty} b_k}{\sum_{k=n}^{\infty} a_k} = 1$$

が成り立つことを示せ.

共通問題 2.

(1) $A = (a_1, \ldots, a_n)$ が n 次ユニタリ行列のとき，すべての $x \in C^n$ に対して

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, a_i) a_i$$

が成り立つことを示せ．ただし，$(x, y) = {}^t x \bar{y}$ とする．

(2) $A = (a_1, \ldots, a_n)$，$B = (b_1, \ldots, b_n)$ を n 次正方行列とする．このとき，すべての $x \in C^n$ に対して

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, a_i) b_i$$

が成立するための，A と B に関する条件を求めよ．

共通問題 3. 平面内の凸多角形全体の集合を X とし，$A, B \in X$ に対し $d(A, B) = m(A \cup B - A \cap B)$ と定義する．ただし m は面積である．

(1) d は X 上の距離関数になることを示せ.

X に距離 d による位相を与える.

(2) 各 $A \in X$ に対して面積 $m(A)$ を与える関数 $m : X \to \mathbf{R}$ は X 上の連続関数であることを示せ.

(3) $A \in X$ のとき $\Delta(A) = \{E \mid E \in X, E \subset A\}$ はコンパクトでないことを示せ.

選択問題 4.

(1) 位数 4 の群はアーベル群であることを証明せよ.

(2) 位数 8 の群はアーベル群か？　正しいならば証明し，必ずしも正しくないならば反例を挙げて説明せよ.

選択問題 5. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 + (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0\}$ とする.

(1) M は $\mathbf{R}^3$ の 2 次元 C^∞ 級閉部分多様体になることを示せ.

(2) M の種数，またはオイラー数を求めよ.

選択問題 6. 写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は点 $a \in \mathbb{R}^n$ で全微分可能とする．すなわち，線形写像 $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が存在して

$$\lim_{\|x-a\|_n \to 0} \frac{\|f(x)-f(a)-A(x-a)\|_m}{\|x-a\|_n} = 0$$

が成り立つとする．ただし $\|\cdot\|_n$ は $\mathbb{R}^n$ のユークリッドノルムである．さらに写像 $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ は点 $f(a)$ で全微分可能とする．このとき合成写像 $h = g\circ f$ は点 a で全微分可能であることを示せ.

専門科目（午後）13:00–15:00

注意事項：問題は代数系問題３題、幾何系問題３題、解析系問題４題から３題を選択し答えよ。但し、自分の志望分野の系から少なくとも１題選択せよ。

代数系問題

1. 3 次対称群 S_3 について

(i) 内部自己同型群 $\mathrm{Inn}\,(S_3)$ を決定せよ.

(ii) 自己同型群 $\mathrm{Aut}\,(S_3)$ を決定せよ.

2. R は 1 を含む可換環，S は 0 を含まない R の部分集合で，乗法に関して閉じているとする.

(i) $S \cap \wp = \emptyset$ となるような素イデアル $\wp$ が存在することを Zorn の補題を用いて証明せよ.

(ii) R において，ベキ零元全体のなす集合を N とすれば，R のすべての，素イデアルの共通部分は N と一致することを証明せよ.

3. K を体で標数 $\mathrm{ch}(K) = p > 0$ とする．L を K の p 次ガロア拡大とするとき以下を示せ.

(i) L の K 上のガロア群 G は巡回群である.

(ii) G の生成元を σ とするとき $\displaystyle\sum_{j=0}^{p-1}\sigma^j(\theta) \neq 0$ となる θ が存在する.

(iii) $\displaystyle\alpha = \sum_{j=0}^{p-1} j\sigma^j(\theta)$ と置くと

$$b := \sigma(\alpha) - \alpha$$

は K の元である.

(iv) $L = K(\alpha)$ で，ある $a \in K$ が存在して $x = \alpha/b$ は

$$x^p - x - a = 0$$

を満たす.

幾何系問題

4. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の, 次の同値関係 $\sim$ による商空間を M とする.

$$x \sim y \iff y = -x \ \text{ または } \ y = x \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

$n \geq 2$ とするとき, M は位相多様体, すなわち, 局所的に $\mathbb{R}^n$ の開集合と同相な位相空間, になるかどうかを判定せよ.

5. Σ_2 を向き付け可能な種数 2 の閉曲面とする.

(i) Σ_2 の整係数ホモロジー群 $H_*(\Sigma_2)$ を求めよ.

(ii) S_1, S_2 を下図の様な Σ_2 内の閉曲線とする. このとき, 整係数ホモロジー群 $H_*(\Sigma_2, S_1)$ と $H_*(\Sigma_2, S_2)$ を求めよ.

6. $\mathbb{R}^{n+1}$ の 2 次形式

$$B(x,y) = -x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

に対し 超曲面

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid B(x,y) = -1\}$$

を考える. また $O(1,n)$ を任意の $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対し $B(Ax, Ay) = B(x,y)$ を満たす $A \in GL(n+1, \mathbb{R})$ の元全体とする.

(i) H^n は $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分多様体であることを示せ.

(ii) $O(1,n)$ の部分群 K を

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in O(1,n) \right\}$$

とおくとき, H^n は等質空間 $O(1,n)/K$ と微分同相であることを示せ.

解析系問題

7. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする. f および $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ はそれぞれ X 上の可積分関数および可積分関数列であり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$ が成り立つものとする. このとき以下を示せ.

(i) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に X 上で測度収束する. すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}\right) = 0$$

が成り立つ.

(ii) $|f|$ の不定積分は絶対連続である. すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して, $\mu(A) < \delta$ なる任意の可測集合 $A \subset X$ に対して

$$\int_A |f| d\mu < \epsilon$$

が成り立つ.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ を満たす X 内の任意の可測集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |f_n| d\mu = 0$$

が成り立つ.

8. $n \times n$ 実行列 A に対して

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_n}{\|x\|_n}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とおく．ただし $\|x\|_n = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$ である．このとき以下を示せ.

(i) $\|A\| = \|Ax^0\|_n$ かつ $\|x^0\|_n = 1$ となる $x^0 \in \mathbf{R}^n$ が存在する.

(ii) $\|A\|$ は $n \times n$ 実行列の全体 $M(n)$ のノルムとなり，ノルム空間 $(M(n), \|\cdot\|)$ は完備である.

(iii) $|t|$ が十分小さな実数 t に対して，級数 $\sum_{k=0}^{\infty} t^k A^k$ はこのノルムに関して収束する.

9. $a_1, \ldots, a_n$ を相異なる複素数として，$f(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - a_j)$ とおく．さらに $(n-1)$ 次多項式 $g(z)$ に対して

$$F(z) = \frac{g(z)}{f(z)} - \sum_{j=1}^{n} \frac{g(a_j)}{f'(a_j)} \frac{1}{z - a_j}$$

とおく．このとき以下を示せ.

(i) F は $|z| < \infty$ で正則である.

(ii) $F(z) \equiv 0$ である.

10. $A(t) = (a_{ij}(t))$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数 $a_{ij}(t)$ を成分とする $n \times n$ 行列とし，微分方程式系

$$(*) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

を考える.

(i) 任意の点 $\xi \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\mathbb{R}^n$ 値の関数列 $\{x_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$ を

$$\begin{cases} x_0(t) = \xi, \\ x_m(t) = \xi + \displaystyle\int_0^t A(s)x_{m-1}(s)ds \quad (m = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

によって定義する．この関数列は任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して収束し，その極限関数 $x(t) = \lim_{m\to\infty} x_m(t)$ は微分方程式 $(*)$ の初期条件 $x(0) = \xi$ を満たすただひとつの解であることを証明せよ.

(ii) $(*)$ の解全体は $\mathbb{R}$ 上の n 次元ベクトル空間をつくることを証明せよ.

外国語科目：15:50–16:50

Lipman Bers について述べた文章の和訳。文章自体はここでは割愛する。