

# 平成10年度東工大大学院試験問題

平成9年8月25日 実施(手書きで出題)

## 専門科目(午前) 数学(基礎): 9:00-11:30

注意事項: 以下の問題のうち、問1~問3は3題とも、問4~問6の中からは1題を選択し、解答せよ。

記号について:  $\mathbb{Z}$  は整数全体、 $\mathbb{R}$  は実数全体をあらわす。

問1. 実行列

$$H = \begin{pmatrix} -1 & -2 & z \\ x & 2 & 2 \\ 4 & y & -1 \end{pmatrix}$$

に対し  $U^{-1}HU$  が対角行列となるような実直交行列  $U$  が存在するとする。 $x, y, z$  はどんな実数か。また上のような行列  $U$  を見つけよ。

問2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  となる数列  $\{a_n\}$  に関し、次の問に答えよ。

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = A$  であることを示せ。

(2)  $A \neq 0$  とする。数列  $\{b_n\}$  を

$$b_n = \frac{1}{n^\alpha}(a_1 + 2^2 a_2 + \dots + n^2 a_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

と定めたとき、 $\{b_n\}$  が収束するような最小の実数  $\alpha$  を求めよ。また、そのときの極限值を求めよ。

問3.  $A, B$  を互いに交わらない  $\mathbb{R}^2$  の空でない閉集合、 $d$  を  $\mathbb{R}^2$  の標準的距離とする。

(1)  $x \notin A$  に対して  $\inf\{d(x, a) \mid a \in A\} > 0$  を示せ。また、ある  $a_0 \in A$  が存在して  $d(x, a_0) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$  となることを示せ。

(2)  $\mathbb{R}^2$  の開集合  $U, V$  で

$$A \subset U, \quad B \subset V \quad \text{かつ} \quad U \cap V = \emptyset$$

を満たすものが存在することを証明せよ。

問4. 素数  $p$  に対し

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}$$

は

$$SL(2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \right\}$$

のシロー部分群になっていることを示せ。

問5.  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  上の関数  $f(x, y, z) = z^2$  を考える。

(1)  $f$  は  $S^2$  上の  $C^\infty$  級関数であることを示せ。

(2)  $df = 0$  となる点を求めよ。

問 6.  $\mathbb{R}$  上の関数  $F(t)$  を次式によって定義する :

$$F(t) = \int_0^{\infty} \frac{2 + \sin(tx^2)}{1 + x^4} dx.$$

- (1)  $F(0)$  を求めよ。
- (2)  $F(t)$  は微分可能であることを示せ。

## 専門科目 (午後) 数学 (専門): 13:00–15:30

注意事項 : 以下の問題のうち 3 題を選択し、解答せよ。ただし、

口頭試問を代数班で受けることを希望する人は問 1 ~ 問 3 から少なくとも 1 題、

口頭試問を幾何班で受けることを希望する人は問 4 ~ 問 6 から少なくとも 1 題、

口頭試問を解析班で受けることを希望する人は問 7 ~ 問 9 から少なくとも 1 題を、

選択する 3 題の中に入れること。

記号について :  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  はそれぞれ、整数全体、有理数全体、実数全体、複素数全体をあらわす。

問 1.  $\mathbb{C}[X, Y]$  を 2 変数の多項式環とし、 $R = \mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X^5)$  とおく。

- (1)  $R$  は整域であることを示せ。
- (2)  $X$  と  $Y$  で生成される  $R$  のイデアル  $\mathfrak{m}$  は単項イデアルでないことを証明せよ。

問 2. 任意の有限体  $F$  に対し、多項式環  $\mathbb{Z}[T]$  の極大イデアル  $\mathfrak{m}$  で  $\mathbb{Z}[T]/\mathfrak{m} \cong F$  となるものが存在することを示せ。一方、 $\mathbb{Z}[T]/\mathfrak{m} \cong \mathbb{Q}$  となるものは存在しないことを示せ。

問 3.  $G$  を有限群とし、 $p$  を  $G$  の位数を割る最小の素数とする。このとき  $G$  の、指数  $p$  の部分群は正規部分群であることを示せ。

問 4.  $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| = 1\}$  の中の滑らかな閉曲面を  $M$  とする。 $S^3$  の点  $a$  (ただし、 $\pm a \notin M$ ) を一つ固定して、 $M$  上の関数  $h, \omega, f$  を

$$h(p) = \langle a, p \rangle, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ は } \mathbb{R}^4 \text{ の内積}, \quad \omega(p) = [a \text{ と } p \text{ の球面距離}], \quad f(p) = \|a - p\|^2$$

で定義する。

- (1) 3 つの関数  $h, \omega, f$  の臨界点は一致することを示せ。
- (2) 臨界点  $p \in M$  では、 $a$  は  $M$  の接平面に直交することを示せ。

問 5.  $M$  をコンパクト  $n$  次元微分可能多様体とする。 $f: M \rightarrow M$  が微分同相写像で  $f^k = 1$  ( $k \geq 2$  は整数) を満たすものとする。すべての  $1 \leq j \leq k-1$  と  $x \in M$  に対し、 $f^j(x) \neq x$  であるとする。 $M$  を同値関係

$$x \approx y \iff y = f^j(x) \text{ となる } 0 \leq j \leq k-1 \text{ が存在する}$$

で割った商空間を  $N$ ,  $p: M \rightarrow N$  を射影とする。

- (1)  $N$  はコンパクト  $n$  次元微分可能多様体の構造を持ち、 $p$  は微分可能写像となることを示せ。
- (2)  $M$  上の微分形式  $\omega$  に対し、 $\omega = p^*\nu$  となるような  $N$  上の微分形式  $\nu$  があるための必要十分条件は  $\omega = f^*\omega$  が成り立つことであることを証明せよ。

問 6. 2次元トラス  $T^2$  から相異なる  $p, q$  を除いた空間の整係数ホモロジ - 群

$$H_n(T^2 - \{p, q\}; \mathbb{Z})$$

を求めよ。

問 7.  $f(x, y)$  を平面  $\mathbb{R}^2$  上で定義され、 $f(0, 0) = 0$  かつ任意の  $(x, y), (x, y') \in \mathbb{R}^2$  に対して条件

$$|f(x, y) - f(x, y')| \leq k|y - y'| \quad (k \text{ は } 0 < k < 1 \text{ をみたす定数})$$

を満たす実数値連続関数とする。このとき、 $\mathbb{R}$  上の連続関数  $\varphi(x)$  で  $\varphi(0) = 0$  かつ方程式  $\varphi(x) = f(x, \varphi(x))$  を満たすものがただ一つ存在することを証明せよ。さらに、 $f(x, y)$  が  $C^1$  級ならば  $\varphi(x)$  も  $C^1$  級であることを証明せよ。

問 8.  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  を Lebesgue 積分可能な関数とする。  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$g(t) = \int_0^\infty f(x) \cos(tx) dx$$

で定義すると  $g$  は  $\mathbb{R}$  上の有界一様連続関数となることを示せ。

問 9.  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  とし、 $A_b(D)$  は  $D$  上の有界正則関数全体とする。さらに、 $F: D \rightarrow D$  は

- (a)  $F(0) = 0$ ,
- (b)  $F'(0) \neq 0$ ,
- (c)  $\sup_{z \in D} |F(z)| < 1$

を満たす正則関数とする。

(1)  $F \in A_b(D)$  に対し、 $\|f\| = \sup_{z \in D} |F(z)|$  と定義すると  $A_b(D)$  は  $\|\cdot\|$  をノルムとする Banach 空間となることを示せ。

(2)  $T: A_b(D) \rightarrow A_b(D)$  を  $(Tf)(z) = f(F(z)) (z \in D)$  と定義すれば  $T$  は単射であるが全射ではないことを示せ。

## 外国語科目：16:00–17:00

G.H. Hardy “Ramanujan” より選んだ文章の和訳。文章自体はここでは割愛する。