

# 筆答専門試験科目（午前）

2026 大修

## 数学系

時間 9:00~11:30

### 注意事項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題 5 題すべてに解答せよ.
3. 解答は 1 題ごとに別々の解答用紙に記入せよ.
4. すべての解答用紙に必ず受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 3 ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野, 幾何分野, 解析分野のどれで受けることを希望するかをすべての解答用紙の受験番号の右に書くこと.

### 記号について:

$\mathbb{N}$  は 1 以上の整数全体を表す.

$\mathbb{Z}$  は整数全体を表す.

$\mathbb{Q}$  は有理数全体を表す.

$\mathbb{R}$  は実数全体を表す.

$\mathbb{C}$  は複素数全体を表す.

[1]  $A$  を次の 4 次正方行列とする :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

線形変換  $f_A: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  を,  $f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$  ( $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^4$ ) と定める. ここで,

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \mid a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \right\}$$

とすると,  $f_A$  は  $f_A(W) \subset W$  をみたす.

(1)  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \in \mathbb{C}^4$  を,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする. このとき, 線形変換

$$f_A|_W: W \rightarrow W, \mathbf{w} \mapsto A\mathbf{w}$$

の,  $W$  の基底  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$  に関する表現行列  $B$  を求めよ.

(2) (1) の  $B$  の固有多項式  $\varphi_B(t)$  と最小多項式  $\psi_B(t)$  を求めよ.

(3) 3 次複素正方行列全体からなる集合を  $M_3(\mathbb{C})$  と書き, (1) の  $B$  に対して,

$$X_B = \{N \in M_3(\mathbb{C}) \mid NB = BN, N \text{ はベキ零行列}\}$$

とおく.  $N \in X_B$  に対し,  $N^{n-1} \neq O$  かつ  $N^n = O$  をみたす正の整数  $n$  を  $n_N$  と書く.  $N$  が  $X_B$  全体を動くときの,  $n_N$  の最大値を求めよ.

[2]  $n$  を正の整数,  $A$  を  $A = {}^t A$  をみたす  $n$  次実正方行列とする. ただし, 行列  $X$  に対して  ${}^t X$  は  $X$  の転置行列を表す.

(1)  $A$  のすべての固有値の実部は 0 であることを示せ.

(2)  $\lambda, \lambda'$  を  $A$  の相異なる固有値とする.  $\lambda$  に対する固有ベクトル  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ ,  $\lambda'$  に対する固有ベクトル  $\mathbf{x}' \in \mathbb{C}^n$  をとる. このとき,  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  は  $\mathbb{C}^n$  におけるエルミート内積に関して互いに直交することを示せ.

(3)  $n = 3$  とする. このとき, ある 3 次実直交行列  $P$  と実数  $r$  が存在して,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} rJ & \mathbf{0} \\ t\mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$

と書けることを示せ. ただし,  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  とする.

(4) 一般の  $n$  に対して  $\text{rank } A$  がとり得る値をすべて求めよ.

- [3]  $n$  を正の整数とし,  $\mathbb{R}^n$  の位相  $\mathcal{O}$  を次の性質をみたす位相のうち最も弱い (最も小さい, 最も粗い) ものとする:

任意の 1 次関数  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  に対して  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \geq 0\}$  は閉集合である.

ただし, 1 次関数とは,  $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$  として,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  に対して

$$\varphi(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b$$

なる形の関数とする.

- (1) 1 次関数  $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は  $\mathcal{O}$  と  $\mathbb{R}$  の標準的な位相に関して連続であることを示せ.
- (2)  $\mathbb{R}^n$  の標準的な位相を  $\mathcal{E}$  とするとき,
  - (a)  $\mathcal{E}$  は  $\mathcal{O}$  と一致する
  - (b)  $\mathcal{E}$  は  $\mathcal{O}$  より真に弱い位相である
  - (c)  $\mathcal{O}$  は  $\mathcal{E}$  より真に弱い位相である
  - (d) 上のいずれでもない

のうち正しいものはどれか. 理由をつけて答えよ.

- [4] (1) 閉区間  $[0, 1]$  上の連続関数は一様連続であることを示せ.
- (2) 閉区間  $[0, 1]$  上の関数列  $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$  がある連続関数  $f$  に各点収束をしており, 各  $f_j$  は単調非減少関数であるとする. ここで,  $f_j$  が単調非減少関数であるとは  $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$  であれば  $f_j(x_1) \leq f_j(x_2)$  が成り立つことである. このとき, 関数列  $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$  は  $f$  に一様収束することを示せ.

- [5]  $a, b, c$  を実数とする. 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{a \log n + b^n \log(n + (-1)^{n-1}) + c \log(n + 2)\} \quad (\text{A})$$

を考える.

- (1)  $|b| < 1$  のとき, 級数 (A) の収束発散を調べよ.
- (2)  $|b| = 1$  のとき, 級数 (A) の収束発散を調べよ.

# 筆答専門試験科目（午後）

2026 大修

## 数学系

時間 13:00~15:00

### 注意事項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち2題を選択して解答せよ.
3. 解答は1題ごとに別々の解答用紙に記入せよ.
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で4ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野, 幾何分野, 解析分野のどれで受けることを希望するかをすべての解答用紙の受験番号の右に書くこと（午前と同じ分野を書くこと）.

### 記号について:

$\mathbb{N}$  は1以上の整数全体を表す.

$\mathbb{Z}$  は整数全体を表す.

$\mathbb{Q}$  は有理数全体を表す.

$\mathbb{R}$  は実数全体を表す.

$\mathbb{C}$  は複素数全体を表す.

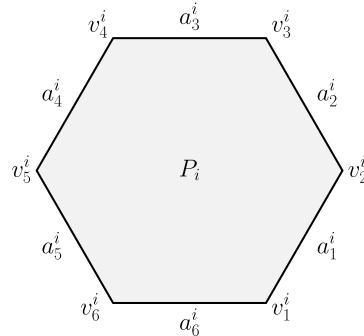
- [1]  $G$  を有限群,  $R = \mathbb{C}[G] = \{\sum_{g \in G} c_g g \mid c_g \in \mathbb{C} (g \in G)\}$  をその群環とする.  $\mathbb{C}$  ベクトル空間  $R$  の線形変換  $\mu: R \rightarrow R$  を

$$\mu(r) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} r g \quad (r \in R)$$

により定める.

- (1)  $R$  の中心  $Z(R) = \{r \in R \mid \text{任意の } s \in R \text{ に対して } rs = sr\}$  の次元は,  $G$  の共役類の個数に等しいことを示せ. また,  $\mu(R) = Z(R)$  であることを示せ.
  - (2) 任意の  $r, s \in R$  に対して,  $\mu(rs) = \mu(sr)$  であることを示せ.
  - (3)  $\text{Ker } \mu = [R, R]$  であることを示せ. ただし,  $[R, R]$  は  $\{[r, s] = rs - sr \in R \mid r, s \in R\}$  が生成する  $R$  の部分ベクトル空間である.
  - (4)  $G$  が単位群  $\{e\}$  でなければ,  $R$  はどのような正の整数  $n$  に対しても  $n$  次行列環  $M_n(\mathbb{C})$  と  $\mathbb{C}$  上の代数として同型にならないことを示せ.
- [2] (1)  $L, M$  が体  $K$  の有限次分離拡大であるとき,  $L \otimes_K M$  はいくつかの  $L$  の有限次分離拡大  $L_1, \dots, L_n$  の直積環  $\prod_{i=1}^n L_i$  と  $L$  代数として同型であることを示せ.
- (2)  $\alpha \in \mathbb{C}$  を  $\alpha^{15} = 2$  なる複素数とし,  $L = \mathbb{Q}(\alpha)$  とおく.  $L_1, \dots, L_n$  を  $\mathbb{C}/L$  の中間体とする. 直積環  $\prod_{i=1}^n L_i$  が  $L \otimes_{\mathbb{Q}} L$  と  $L$  代数として同型であるとき,  $L_1, \dots, L_n$  を求めよ.
- [3]  $M$  を 2 次実正定行列全体からなる集合とし, 成分を対応させることにより  $\mathbb{R}^4$  と同一視する. また  $S$  を 2 次実対称行列全体からなる集合とし,  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  に  $(a, b, c)$  を対応させることにより  $\mathbb{R}^3$  と同一視する.  $M$  から  $S$  への可微分写像  $f$  を  $f(X) = {}^t X X$  により定める. ここで  ${}^t X$  は  $X$  の転置行列である.  $S^+ = \{Y \in S \mid Y \text{ の固有値はいずれも非負}\}$  とおく.
- (1)  $f(M) = S^+$  であることを示せ.
  - (2)  $f$  の臨界点のなす集合を求めよ. ここで臨界点とは微分が全射でない点を意味する.
  - (3)  $f$  の臨界値のなす集合を求めよ. ここで臨界値とは臨界点の像になっている点を意味する.
  - (4)  $Y$  を  $S^+$  に属し  $f$  の臨界値ではない点とする. 逆像  $f^{-1}(\{Y\})$  は, 2 つの円周の非交和であることを示せ.

- [4]  $k$  を正の整数とする.  $k$  個の正六角形 (ただし, 内部も含む) を用意して, それらを  $P_1, P_2, \dots, P_k$  とする. 各  $i$  に対して,  $P_i$  の頂点を順に  $v_1^i, \dots, v_6^i$  とし 6 つの辺を  $a_j^i = \overrightarrow{v_j^i v_{j+1}^i}$  とする. ここで,  $j$  は mod 6 で考える. 各  $i$  と  $j$  に関して  $a_j^i$  と  $a_{j+1}^{i+1}$  を向きを保って同一視して位相空間  $X_k = (P_1 \sqcup \dots \sqcup P_k) / \sim$  を構成する. ここでは,  $i$  は mod  $k$  で,  $j$  は mod 6 で取り扱う.



- (1)  $X_6$  の整係数ホモロジー群を求めよ.  
 (2)  $X_2$  の整係数ホモロジー群を求めよ.
- [5] 複素平面  $\mathbb{C}$  上の有理型関数  $f$  が, 原点  $z = 0$  を通らない任意の区分的になめらかな単純閉曲線  $C$ , 任意の  $w \in \mathbb{C}$  および任意の  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  に対して

$$\int_C f(z)(z-w)^{2m} dz = 0$$

をみたすとする.

- (1)  $f$  は  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  で正則であることを示せ.  
 (2)  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$  上の正則関数  $g, h$  が

$$g(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k z^k, \quad h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \quad (a_{-n} \neq 0, b_0 \neq 0)$$

のようにローラン展開されるとき, 積  $gh$  の原点における留数を求めよ.

- (3)  $f$  は  $\mathbb{C}$  で正則であることを示せ.  
 (4) さらに  $f$  が

$$\limsup_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|f(z)|}{\log |z|} < \infty$$

をみたすとき, そのような  $f$  をすべて求めよ.

[6] 閉区間  $[0, 1]$  上の実数値ボレル可測関数全体からなる集合を  $M([0, 1])$  と表す. 各  $f \in M([0, 1])$  に対し, 実数  $\alpha(f)$  を

$$\alpha(f) = \inf \left\{ c \geq 0 \mid \mu(|f| > c) \leq c \right\}$$

と定義する. ただし,  $\mu$  は  $[0, 1]$  上のルベーグ測度であり,

$$\mu(|f| > c) = \mu\left(\left\{x \in [0, 1] \mid |f(x)| > c\right\}\right)$$

である.

- (1) 任意の  $f \in M([0, 1])$  に対して, 不等式  $\mu(|f| > \alpha(f)) \leq \alpha(f)$  が成り立つことを示せ.
- (2) 関数列  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M([0, 1])$  に対する以下の条件 (a), (b) が同値であることを示せ.
  - (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(f_n) = 0$  である.
  - (b) 任意の  $c > 0$  に対して,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(|f_n| > c) = 0$  が成り立つ.
- (3) 関数列  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M([0, 1])$  と  $f \in M([0, 1])$  が,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(f_n - f) = 0$  をみたすとする. このとき, 以下を示せ.
  - (a)  $\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \mu(|f_n| > c) = 0$  が成り立つ.
  - (b) 任意の連続関数  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対して,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(F(f_n) - F(f)) = 0$  が成り立つ.

[7]  $I$  を开区間  $(0, 1)$  とする.  $L^2(I)$  上の線形作用素  $K$  を

$$Ku(t) = \int_0^t u(s) ds \quad (u \in L^2(I), t \in I)$$

により定める.  $K$  のスペクトルを  $\sigma(K)$ ,  $K$  の固有値全体からなる集合を  $\sigma_p(K)$  とする.

- (1)  $K$  は  $L^2(I)$  上のコンパクト作用素であることを示せ.
- (2)  $0 \in \sigma(K)$  であることを示せ.
- (3)  $\sigma(K)$  および  $\sigma_p(K)$  を求めよ.