筆答専門試験科目（午前）　　２０２５ 大修

数 学 系　　時間　９：００～１１：３０

注 意 事 項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題 5 題すべてに解答せよ.
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 3 ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野, 幾何分野, 解析分野のどれで受けることを希望するかを解答用紙の 1 ページ目の受験番号の右に書くこと.

記号について:

$\mathbb{N}$ は 1 以上の整数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

[1] A を次の 5 次複素正方行列とする.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -e \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}.$$

ただし, $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$ とする.

(1) 行列 A の固有多項式を求めよ.

(2) 行列 A の最小多項式は, 5 次式であることを示せ.

(3) 行列 A のジョルダン標準形が次の形になるための, $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$ の必要十分条件を求めよ.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

[2] A, B を 3 次複素正方行列とする. このとき 3 次複素正方行列 X 全体がなす複素ベクトル空間からそれ自身への線形写像 $f_{A,B}$ を

$$f_{A,B}(X) := AXB$$

により定める.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ であるとき, $f_{A,B}$ の固有値を重複度をこめて全て求めよ. さらに, 絶対値が最大の固有値に対する固有ベクトルを一つ求めよ.

(2) A, B を一般の 3 次複素正方行列とする. このとき $f_{A,B}$ の核の次元を, A の階数 r と B の階数 s を用いて表せ.

[3] $\mathbb{R}^2$ の通常の位相を $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ とし,

$$\mathcal{O} = \{\emptyset\} \cup \{O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2) \mid \mathbb{R}^2 \setminus O \text{ は有界である }\}$$

とする. また, $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $A = \mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ を考える.

(1) $\mathcal{O}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合系を定めることを示せ.

(2) 位相空間 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間であるか？ 理由をつけて答えよ.

(3) $\mathcal{O}$ から定まる A の相対位相を $\mathcal{O}_A$ とするとき, $(A, \mathcal{O}_A)$ は連結であるか？ 理由をつけて答えよ.

(4) 位相空間 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ はコンパクトであるか？ 理由をつけて答えよ.

[4] $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f が $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ をみたすとする. このとき $\mathbb{R}$ 上の関数 g を

$$g(x) = \sup\{\, t \in \mathbb{R} \mid \ f(t) < x\}$$

と定める.

(1) f が $\mathbb{R}$ 上連続かつ狭義単調増加ならば, g は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ. ただし f が $\mathbb{R}$ 上狭義単調増加であるとは, $x < y$ を満たす任意の実数 x, y に対して $f(x) < f(y)$ がなりたつことを意味する.

(2) f が $\mathbb{R}$ 上連続ならば, g は $\mathbb{R}$ 上で左連続であることを示せ. ただし g が $\mathbb{R}$ 上で左連続であるとは, 任意の実数 x に対して $\displaystyle\lim_{y \to x-0} g(y) = g(x)$ となることを意味する.

(3) 命題

「f が $\mathbb{R}$ 上連続ならば, g は $\mathbb{R}$ 上で連続である」

が真ならばそれを示し, 偽ならば反例を挙げよ.

[5] $a > 0$ に対して, 積分 $I(a)$ を

$$I(a) = \iint_D x^b e^{-\frac{ax^2}{x^2+y^2}}\, dxdy$$

と定める. ただし, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\}$ であり, $b \in \mathbb{R}$ である.

(1) $I(a)$ が収束するための b の条件を求めよ.

(2) b が (1) で求めた条件をみたすとき, $J_k := \displaystyle\lim_{a \to \infty} a^k I(a)$ が存在するような $k \in \mathbb{R}$ とそのような k に対する J_k の値を求めよ. 必要ならば, ガンマ関数 $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty \tau^{z-1} e^{-\tau}\, d\tau$ を用いてもよい.

筆答専門試験科目（午後）　　　２０２５大修

数 学 系　　　時間　１３：００～１５：００

注 意 事 項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち 2 題を選択して解答せよ.
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 4 ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野, 幾何分野, 解析分野のどれで受けることを希望するかを解答用紙の 1 ページ目の受験番号の右に書くこと.（午前と同じ分野を書くこと.）

記号について:

$\mathbb{N}$ は 1 以上の整数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

[1] 本問において環と言えば単位元を持つ可換環とする．A, B, C をネーター環とし, $f : B \to A$, $g : C \to A$ は単位的環の準同型であるとする．

$$B \times_A C := \{(b, c) \in B \times C \mid f(b) = g(c)\}$$

とする．

(1) $B \times_A C$ は直積環 $B \times C$ から誘導される加法と乗法によって, 環となることを示せ．

(2) f, g は全射であると仮定する．このとき, $B \times_A C$ はネーター環となることを示せ．

[2] p を素数, $\xi_p, \xi_{p^2} \in \mathbb{C}$ をそれぞれ 1 の原始 p 乗根, 1 の原始 p^2 乗根とし, K を $\xi_p \in K$ をみたす $\mathbb{C}$ の部分体とする．体 F に対して $F^p = \{a^p \mid a \in F\}$ とし, $\alpha, \beta \in K \setminus K^p$, $x, y, z \in \mathbb{C}$ が $x^p = \alpha$, $y^p = \beta$, $z^p = \alpha y$ をみたすとする．

(1) $y \notin K(x)$ のとき, 体の拡大 $K(x, y)/K$ はガロア拡大であることを示し, そのガロア群を求めよ．

(2) $y \notin K(x)$ かつ $\beta \notin K(\xi_{p^2})^p$ とする．このとき, 体の拡大 $K(y, z)/K$ がガロア拡大であることと $\xi_{p^2} \in K$ であることは同値であることを示せ．

(3) $\xi_{p^2} \in K$ かつ $y \notin K(x)$ かつ $\beta \notin K^p$ のとき, ガロア拡大 $K(y, z)/K$ のガロア群を求めよ．

(4) $\xi_{p^2} \in K$ かつ $y \notin K(x)$ かつ $\beta \notin K^p$ のとき, 体の拡大 $K(x, y, z)/K$ はガロア拡大であることを示し, その拡大次数とガロア群を求めよ．

[3] G を位数 27 の非可換群とする．

(1) G の中心 $Z(G)$ の位数を求めよ．

(2) G における共役類の個数を求めよ．

(3) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, G の n 次元複素既約表現の同型類の個数 m_n を求めよ．

[4] 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ 上の C^∞ 級写像

$$f \colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4; \quad (x, y, z, w) \longmapsto (x^2 - y^2 - z^2 - w^2,\ 2xy,\ 2xz,\ 2xw)$$

を考える．4 次元球面 $S^4 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^5 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ と
点 $N = (1, 0, 0, 0, 0)$ に対し, 全単射

$$\pi \colon S^4 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^4; \quad (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_0}, \frac{x_2}{1 - x_0}, \frac{x_3}{1 - x_0}, \frac{x_4}{1 - x_0} \right)$$

を用いて, 写像 $F \colon S^4 \to S^4$ を

$$F(p) = \begin{cases} \pi^{-1}(f(\pi(p))) & (p \neq N), \\ N & (p = N) \end{cases}$$

と定める．

(1) S^4 に標準的な多様体構造を入れたとき, F は C^∞ 級写像であることを示せ．

(2) F の臨界点すべてを求め, その臨界点での微分 dF の階数をすべて決定せよ．

(3) F の臨界値すべてを求めよ．

[5] 次で定まる $\mathbb{R}^3$ の二つの部分集合を考え, $\mathbb{R}^3$ の標準位相から相対位相を入れる.

$$I^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \le 1, |y| \le 1, |z| \le 1\},$$
$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}.$$

∂I^3 を I^3 の境界とする. I^3 上

$$(1,y,z) \sim (-1,y,z), \qquad (x,1,z) \sim (x,-1,z), \qquad (x,y,1) \sim (x,y,-1)$$

で生成される同値関係を考える. ここで $x,y,z \in [-1,1]$ とする. この同値関係で割った商集合 $I^3/\sim$ に商位相を与え, 商写像 $\pi\colon I^3 \to I^3/\sim$ を考える. n を任意の非負整数とする.

(1) 整係数ホモロジー群 $H_n(\pi(\partial I^3))$ を計算せよ.

(2) 整係数ホモロジー群 $H_n(\pi(S^2))$ を計算せよ.

(3) 整係数ホモロジー群 $H_n(\pi(S^2 \cup \partial I^3))$ を計算せよ.

[6] 複素平面 $\mathbb{C} = \{x+iy \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ (i は虚数単位) 上の領域 D に対して,

$$L_h^2(D) = \left\{ f : D \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ は } D \text{ 上正則で } \iint_D |f(z)|^2 dxdy < \infty \right\}$$

とおく. また $f \in L_h^2(D)$ に対して, $\|f\| = \left\{ \iint_D |f(z)|^2 dxdy \right\}^{\frac{1}{2}}$ とする.

(1) $L_h^2(\mathbb{C}) = \{0\}$ を示せ.

(2) $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とする. $f \in L_h^2(\mathbb{D} \setminus \{0\})$ は $\mathbb{D}$ 上の正則関数に拡張できることを示せ.

(3) $f \in L_h^2(D)$ とする. $z_0 \in D$ に対し, $r > 0$ が $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| \le r\} \subset D$ をみたすならば, $|f(z_0)|^2 \le \dfrac{1}{\pi r^2}\|f\|^2$ であることを示せ.

(4) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L_h^2(D)$ を $\|f_n - f_m\| \to 0$ $(n,m \to \infty)$ となる列とするとき, $f \in L_h^2(D)$ が存在して, $\|f_n - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$ であることを示せ.

[7] (1) $(0,\infty)$ 上のルベーグ可測関数 f は, ほとんど全ての点 $x>0$ で $\dfrac{x}{2} < f(x) \le x$ をみたすとする. このとき, 極限値

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(\frac{\arctan f(x)}{f(x)} \right)^n dx$$

を求めよ.

(2) p を 1 以上の実数とする. $(0,1)$ 上のルベーグ可測関数 f が p 乗可積分であるとき,

$$\int_0^1 |f(x)|^p \, dx = \int_0^\infty p\, t^{p-1} m(\{x \in (0,1) \mid |f(x)| \ge t\}) \, dt$$

を示せ. ただし m はルベーグ測度である.

(3) p を 1 以上の実数とする. $(0,1)$ 上のルベーグ可測関数 f に対し, f が p 乗可積分であることと,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{np} m\left(\{x \in (0,1) \mid |f(x)| \ge 2^n\}\right)$$

が収束することは同値であることを示せ.

[8] $\alpha \in (0,1)$ に対し, $C^\alpha(I)$ を $I=[0,1]$ 上で定義された実数値連続関数 f で, 以下で定める C^α ノルムが有限なもの全体のなす集合とする:

$$\|f\|_{C^\alpha} = |f(0)| + \sup_{x,\, y\in I,\, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

なお, $(C^\alpha(I), \|\cdot\|_{C^\alpha})$ がノルム空間であることは証明なしで用いてよい.

(1) ある定数 $C>0$ が存在し, 任意の $f \in C^\alpha(I)$ に対して, 不等式 $\sup_{x\in I} |f(x)| \leq C\|f\|_{C^\alpha}$ が成り立つことを示せ.

(2) $0<\beta<\alpha$ をみたす β に対し, $C^\alpha(I) \subset C^\beta(I)$ を示せ.

(3) $0<\beta<\alpha$ をみたす β に対し, 集合 $\{f \in C^\beta(I) \mid \|f\|_{C^\alpha} \leq 1\}$ はノルム空間 $(C^\beta(I), \|\cdot\|_{C^\beta})$ でコンパクトであることを示せ.