筆答専門試験科目（午前）　　　　２０２３ 大修

数 学 系　　　　時間　９：００〜１１：３０

注 意 事 項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題 5 題すべてに解答せよ.
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 3 ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野, 幾何分野, 解析分野のどれで受けることを希望するかを解答用紙の 1 ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について:

$\mathbb{N}$ は 1 以上の整数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

[1] V を体 K 上のベクトル空間とし, $\varphi\colon V \to V$ を K 上の線形写像とする. V の部分空間 W で, φ を W 上に制限したものが W から W への線形同型になるもの全体の集合を $\mathcal{S}$ とし, $W_0 = \bigcap_{n \geqq 1} \varphi^n(V)$ とする. ただし, $\varphi^n = \overbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}^{n}$ （φ を n 回合成したもの）とする. 以下の問に答えよ.

(1) 任意の $W \in \mathcal{S}$ は W_0 に含まれることを示せ.

(2) V が有限次元ならば $W_0 \in \mathcal{S}$ であることを示せ.

(3) $W_0 \notin \mathcal{S}$ となるような K, V, φ の例を挙げよ.

[2] n を正整数, a, b を正実数とする. x を不定元とする n 次多項式 $D_n(x; a, b)$ を次のように定める.

$$D_1(x; a, b) = x,$$

$$D_n(x; a, b) = \det \begin{pmatrix} x & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & x & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & x & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b & x & a \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b & x \end{pmatrix} \quad n \geq 2 \text{ の場合.}$$

すなわち $n \geq 2$ の場合 $1 \leq i \leq n$ に対して (i, i) 成分は x, $1 \leq i < n$ に対して $(i, i+1)$ 成分は a, $1 \leq i < n$ に対して $(i+1, i)$ 成分は b であり, その他の成分は 0 であるような n 次正方行列の行列式である.

(1) $D_n(-2; 1, 1)$ を求めよ.

(2) $D_n(x; a, b) = D_n(x; ab, 1)$ を示せ.

(3) $D_n(x; a, b)$ は次の一次式の積に分解されることを示せ:

$$D_n(x; a, b) = \prod_{k=1}^{n} \left(x - 2\sqrt{ab} \cos\left(\frac{\pi k}{n+1} \right) \right).$$

ここで $\sqrt{ab}$ は ab の正の平方根とする.

[3] $\mathbb{R}^2$ 上の位相で部分集合族

$$\mathcal{B} = \left\{ I \times I \subset \mathbb{R}^2 \,\middle|\, I \text{ は } \mathbb{R} \text{ の開区間} \right\}$$

を開基とするものを $\mathcal{O}$ とする. 次の各問に理由をつけて答えよ.

(1) $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間か.

(2) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A を

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

で定めるとき $A \setminus \{(0,0)\}$ は位相 $\mathcal{O}$ についてコンパクト集合か.

(3) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 B を

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 < 1 \right\}$$

で定めるとき, 位相 $\mathcal{O}$ に関する B の閉包 $\overline{B}$ を求め図示せよ.

(4) 2 次実正則行列 X が定める $\mathbb{R}^2$ の線形変換が $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ から $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ への開写像となるような X をすべて求めよ.

[4] 正の実数 a に対して広義積分 $I(a) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}\, dx$ を考える.

(1) $1 < a < 2$ に対して $I(a)$ は絶対収束することを示せ.

(2) $0 < a \leq 1$ に対して $I(a)$ は収束することを示せ.

(3) $0 < a \leq 1$ に対して $I(a)$ は絶対収束しないことを示せ.

[5] (1) 任意の正の整数 k に対して, 級数

$$S(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(nk)^{nk}}$$

が収束することを示せ.

(2) 任意の非負整数 n に対して, 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 (x \log x)^n\, dx$ の値を求めよ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 x^x\, dx$ の値を $S(k)$ を用いて表せ.

筆答専門試験科目（午後）　　　　２０２３ 大修

数 学 系　　　　時間　１３：００〜１５：００

注 意 事 項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち 2 題を選択して解答せよ.
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 4 ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野, 幾何分野, 解析分野のどれで受けることを希望するかを解答用紙の 1 ページ目の受験番号の下に書くこと.（午前と同じ分野を書くこと.）

記号について:

$\mathbb{N}$ は 1 以上の整数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

[1] L を体 K の有限次ガロア拡大体とし, $f(X) \in K[X]$ をモニックかつ K 上で既約な分離多項式とする．このとき次の問に答えよ.

(1) 剰余環 $L[X]/(f(X))$ は L の有限個の有限次分離拡大体の直積環に同型であることを示せ.

(2) F を $f(X)$ の L 上の最小分解体とするとき, F/K は有限次ガロア拡大であることを示せ.

(3) (1) の直積に現れる L の有限個の有限次分離拡大体は互いに K 上同型であることを示せ.

[2] A は 1 をもつ可換環とし, $I \subset A$ は $I \neq A$ を満たすイデアルとする．以下の問に答えよ.

(1) I が素イデアルでないとする．このとき, $I \subsetneq (I : a)$ を満たす $a \in A$ で $a \notin I$ なるものが存在することを示せ．ただし, $(I : a)$ は

$$(I : a) = \{x \in A \mid ax \in I\}$$

で定義される A のイデアルを表す.

(2) I が以下の条件を満たすとする.

(a) I は単項イデアルではない.

(b) A のイデアルで I を真に含むものは, すべて単項イデアルである.

このとき I は素イデアルであることを示せ.

[3] $n \in \mathbb{N}$ とする．$p_1, \ldots, p_n$ を 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の相異なる点とし, $\mathbb{R}^3$ からこれら n 点を取り除いて得られる 3 次元多様体を M_n とする．また, $\mathbb{R}^3$ から原点を取り除いて得られる 3 次元多様体を M とする.

(1) M 上の 2 形式

$$\alpha = \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

について $d\alpha = 0$ であることを示せ.

(2) S を $\mathbb{R}^3$ 内の球面で原点を内部に含むもの（すなわち原点を囲む球面）とし $\iota : S \longrightarrow M$ を包含写像とする．積分

$$\int_S \iota^* \alpha$$

の絶対値を求めよ.

(3) $i = 1, \ldots, n$ に対して $T_i : M_n \longrightarrow M$ を $T_i(p) = p - p_i$ で定義される写像とし,

$$\alpha_i = T_i^* \alpha$$

とおく．閉形式 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が定める M_n の 2 次ドラームコホモロジー類 $[\alpha_1], \ldots, [\alpha_n]$ は 1 次独立であることを示せ.

[4] $\mathbb{R}^3$ 内のトーラス

$$T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 + z^2 = 1 \right\}$$

と 6 点

$$p_j = \left(2\cos\frac{j\pi}{3},\ 2\sin\frac{j\pi}{3},\ 0 \right) \qquad (j = 0,1,2,3,4,5)$$

を考える. 各 j に対して p_j を中心とする半径 1 の 2 次元球面を S_j とする.

(1) $X = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$ の整係数ホモロジー群を求めよ.

(2) $Y = X \cup T$ の整係数ホモロジー群を求めよ.

[5] i を虚数単位とする. z に関する冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $(a_n \in \mathbb{C})$ は複素平面内の開円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ $(R > 0)$ 上で絶対収束するとする. このとき z に関する冪級数 $F(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ を考える.

(1) $F(z)$ は $\mathbb{C}$ 全体で z に関する正則関数を定めることを示せ.

(2) $0 < r < R$ に対して, $M(r) = \displaystyle\max_{|z|=r} |f(z)|$ とする. このとき, すべての r $(0 < r < R)$ に対して,

$$|F(z)| \leq M(r) e^{|z|/r} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

が成り立つことを示せ.

(3) $0 < r < R$ に対して $C_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ と定め, これには反時計回りに向きがついているとする. このとき,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(u) e^{z/u} \frac{du}{u} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

を示せ.

[6] 単位開区間を $I = (0,1)$ とし, I 上のルベーグ可積分関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と I 上のルベーグ可積分関数 f が

$$\lim_{n \to \infty} \int_I |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0$$

を満たすと仮定する. 以下の (1), (2), (3) のそれぞれについて, 主張が正しければ証明し, 正しくなければ反例となる $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と f を挙げよ.

(1) ある $1 < p < \infty$ が存在して

$$\lim_{n \to \infty} \int_I |f_n(x) - f(x)|^p\, dx = 0$$

が成り立つ.

(2) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して, $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は f に I 上ほとんどいたるところ収束する.

(3) 任意の有界連続関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ および任意の $1 < p < \infty$ に対し

$$\lim_{n \to \infty} \int_I |g(f_n(x)) - g(f(x))|^p\, dx = 0$$

が成り立つ.

[7] λ を正定数とし, $f(t)$ を区間 $[0,\infty)$ 上の有界な連続関数とする. 区間 $[0,\infty)$ 上で微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) - \lambda^2 x(t) = f(t) \qquad (t \geq 0) \tag{A}$$

を考える. 次の問に答えよ.

(1) $F(t) = \int_t^\infty e^{-\lambda s} f(s)\, ds$ $(t \geq 0)$ は $[0,\infty)$ で C^1 級であることを示せ.

(2) 関数

$$y(t) = -\frac{1}{2\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda|t-s|} f(s)\, ds \qquad (t \geq 0)$$

は $[0,\infty)$ 上で有界な (A) の解であることを示せ.

(3) $[0,\infty)$ 上で有界な (A) の解 $x(t)$ で $x(0)=0$ を満たすものを求めよ. また, $[0,\infty)$ 上で有界な (A) の解 $x(t)$ で $x(0)=0$ を満たすものは唯一つであることを示せ.

[8] H を内積 $(\cdot,\cdot)$ をもつ実ヒルベルト空間とし, $x \in H$ に対して $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ とする. また, $K \subset H$ を空でない閉凸錐とする. ただし, K が閉凸錐であるとは, K が閉集合であって, 任意の $x, y \in K$ および $\alpha, \beta \geq 0$ に対して $\alpha x + \beta y \in K$ となることをいう. このとき, K の極錐 $K^* \subset H$ を

$$K^* = \{y \in H \mid \text{任意の } x \in K \text{ に対して } (x,y) \leq 0\}$$

で定める.

(1) K^* が閉凸錐であることを示せ.

(2) 任意の $x, y, z \in H$ に対して,

$$\|x-y\|^2 = 2\|x-z\|^2 + 2\|y-z\|^2 - 4\left\|\frac{x+y}{2} - z\right\|^2$$

が成立することを示せ.

(3) 任意の $z \in H$ に対して,

$$\|x-z\| = \inf_{\xi \in K} \|\xi - z\|$$

となる $x \in K$ が存在することを示せ.

(4) 任意の $z \in H$ に対して, (3) で得られた $x \in K$ を用いて $y = z - x$ と定めるとき, $y \in K^*$ および $(x,y) = 0$ であることを示せ.