秋葉原微分幾何セミナー「ツイスター理論」
第2,3話 本多宣博(東北大) 2013年3月30日

4次元多様体上の2形式

- T : 4次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間, oriented
- g : T 上の内積
- $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4$: T^* の onb, 向きと両立.

- $\Lambda^2 = \langle \theta^i \wedge \theta^j \mid i<j \rangle$ 2形式の空間
- $* : \Lambda^2 \to \Lambda^2$ ホッジ * 作用素

$$\varphi \wedge * \psi = (\varphi, \psi)\, \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 \wedge \theta^4, \quad {}^\forall \varphi, \psi \in \Lambda^2$$

$$\theta^1 \wedge \theta^2 \overset{*}{\longmapsto} \theta^3 \wedge \theta^4$$
$$\theta^1 \wedge \theta^3 \longmapsto -\theta^2 \wedge \theta^4$$
$$\theta^1 \wedge \theta^4 \longmapsto \theta^2 \wedge \theta^3$$

$\Lambda_+ := \{ \varphi \in \Lambda^2 \mid *\varphi = \varphi \}$ 自己双対2形式の空間

$\Lambda_- := \{ \varphi \in \Lambda^2 \mid *\varphi = -\varphi \}$ 反自己双対2形式の空間 (ASD)

$$\left.\begin{aligned} \varphi^1 &:= \theta^1\wedge\theta^2 + \theta^3\wedge\theta^4 \\ \varphi^2 &:= \theta^1\wedge\theta^3 - \theta^2\wedge\theta^4 \\ \varphi^3 &:= \theta^1\wedge\theta^4 + \theta^2\wedge\theta^3 \end{aligned}\right\} \Lambda_+ \text{ の直交基底}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi^1 &:= \theta^1\wedge\theta^2 - \theta^3\wedge\theta^4 \\ \psi^2 &:= \theta^1\wedge\theta^3 + \theta^2\wedge\theta^4 \\ \psi^3 &:= \theta^1\wedge\theta^4 - \theta^2\wedge\theta^3 \end{aligned}\right\} \Lambda_- \text{ の直交基底}$$

直和分解 $\Lambda^2 = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-$ が成立する。

以下，$T = \mathbb{H} = \{ x_1 + i x_2 + j x_3 + k x_4 \mid x_\bullet \in \mathbb{R} \}$ とみなす.

$$Sp(1) = \{ q \in \mathbb{H} \mid \bar{q} q = 1 \} \quad (\simeq S^3)$$

$$\begin{array}{ccc} \rho : Sp(1) \times Sp(1) & \longrightarrow & SO(4) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (q_+, q_-) & \longmapsto & [\, q \longmapsto q_+ \, q \, q_-^{-1} \,] \end{array} \quad \text{defined by}$$

- ρ は全射準同型，$\ker \rho = \{ \pm (1, 1) \}$
- $Sp(1) \times Sp(1)$ は $SO(4)$ の普遍被覆群

  i.e. $Spin(4) = Sp(1) \times Sp(1)$.

以下，2つの $Sp(1)$ を区別して，$Sp(1)_+ \times Sp(1)_-$ と書く.

$SO(4)$ のリー環 $\mathfrak{so}(4)$ を Λ^2 と同一視するとき，
上の準同型 $\rho : Sp(1)_+ \times Sp(1)_- \longrightarrow SO(4)$ の微分

$$d\rho : \mathfrak{sp}(1)_+ \times \mathfrak{sp}(1)_- \longrightarrow \mathfrak{so}(4)$$

から得られる $\mathfrak{so}(4)$ の分解は，$\Lambda^2 = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-$
と一致する。

<u>Pf.</u> ρ の作り方から具体的計算により，$i, j, k \in \mathfrak{sp}(1)_+$ に対し，

$$i \overset{d\rho}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j \overset{d\rho}{\longmapsto} \begin{pmatrix} & & -1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \end{pmatrix}, \quad k \overset{d\rho}{\longmapsto} \begin{pmatrix} & & 0 & -1 \\ & & -1 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \end{pmatrix}$$

がわかる。これらはそれぞれ

$$\theta^1\wedge\theta^2 + \theta^3\wedge\theta^4, \qquad \theta^1\wedge\theta^3 - \theta^2\wedge\theta^4, \qquad \theta^1\wedge\theta^4 + \theta^2\wedge\theta^3$$

に対応する。これらは Λ_+ の基底だったので，$d\rho$ は $\mathfrak{sp}(1)_+$ から
Λ^2_+ への同型を与える。$\mathfrak{sp}(1)_- \simeq \Lambda_-$ についても同様 //

準同型 $\rho : Sp(1)_+ \times Sp(1)_- \longrightarrow SO(4)$ により,

$$Sp(1)_+ \times Sp(1)_- \curvearrowright T \ (= \mathbb{H})$$ と作用する.

$\Downarrow$ 複素化

$$Sp(1)_+ \times Sp(1)_- \curvearrowright T^{\mathbb{C}} \ (= T \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$ を得る.

これは 複素4次元既約表現.

一方, $Sp(1)_\pm$ の自然表現を $V_\pm \ (= \mathbb{H})$ とすると, テンソル積表現

$$Sp(1)_+ \times Sp(1)_- \curvearrowright V_+ \otimes_{\mathbb{C}} V_-$$

を得る。これも複素4次元既約表現.

$Sp(1)_+ \times Sp(1)_-$ のこれら2つの表現は同値.

i.e. $T_{\mathbb{C}} \simeq V_+ \otimes_{\mathbb{C}} V_-$ as $Sp(1)_+ \times Sp(1)_-$ 加群.

<u>Pf.</u> $Sp(1)$ の複素既約表現は各次元にひとつずつあり, V を自然表現とすると, それらは $S^m V$ (m 回対称積) で与えられる. また, 直積群 $Sp(1)_+ \times Sp(1)_-$ の既約表現は, それぞれの既約表現のテンソル積として得られる. これらより, $Sp(1)_+ \times Sp(1)_-$ の4次元既約表現は,

$$S^3 V_+ \otimes \mathbb{C}, \quad V_+ \otimes V_-, \quad \mathbb{C} \otimes S^3 V_-$$

の3つから成るが, $S^3 V_+ \otimes \mathbb{C}$ と $\mathbb{C} \otimes S^3 V_-$ は $SO(4)$ 表現には落ちない. よって $T_{\mathbb{C}} \simeq V_+ \otimes V_-$ でなければならない. //

注. ・同型 $T_{\mathbb{C}} \simeq V_+ \otimes V_-$ は定数倍を除いて一意的.

(シューアの補題)

・同型 $T_{\mathbb{C}} \simeq V_+ \otimes V_-$ の具体的表示が必要

になることも多い.

$T = \mathbb{H}$ 上の複素構造

$$\mathcal{C}_{\pm} := \{ g \in Sp(1)_{\pm} \mid g^2 = -1 \}$$
$$= \{ x_2 i + x_3 j + x_4 k \mid x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \}$$
$$= Sp(1) \cap \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \simeq S^2$$

- $\mathcal{C}_+$ (resp. $\mathcal{C}_-$) の各元は、左 (resp. 右) からのかけ算により、T 上の複素構造を定める.
- いずれも、内積 g を保つ.

$\therefore$ $\mathcal{C}_{\pm}$: families of orthogonal cx structures on T

$\mathcal{C}_+$ の各点が定める複素構造の向きと、
$\mathcal{C}_-$ の各点が定める複素構造の向きは相異なる。

<u>Pf.</u> $\mathcal{C}_+$ も $\mathcal{C}_-$ も連結であるから、$i \in \mathcal{C}_+$ と $i \in \mathcal{C}_-$ が定める cx str. の向きが相異なることを示せばよい。
いずれの場合も、$T = \mathbb{H}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底として $\{1, j\}$ をとることができる。

$$\begin{array}{ccc} & 1, & j \\ i\times & \downarrow & \downarrow \\ & i, & k \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & 1, & j \\ \times i & \downarrow & \downarrow \\ & i, & \underline{-}k \end{array}$$

より、複素構造の向きはたしかに相異なる。//

$T=\mathbb{H}$ の複素構造で直交変換となっているものは、$\mathfrak{T}_+, \mathfrak{T}_-$ の各元が定めるものに限る。

<u>Pf.</u> J : cx str, $J\in O(4)$ とする。$J(1)=g^{\ast\pm1}\ (\in\mathbb{H})$ とおく。
$\langle 1,g\rangle$ は J 不変な平面で、平面上の直交複素構造は $\pm 90°$ 回転の2つしかないので、$g\perp 1$, すなわち $g\in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ である。
$J\in O(4)$ より $|g|^2=1$, よって $g\in\mathfrak{T}\ (:=\mathrm{Im}\,\mathbb{H}\cap Sp(1))$. よって主張を示すには、$g\in\mathfrak{T}$ に対して $J(1)=g$ をみたす直交複素構造が2つしかないことを示せばよい。
これは、$J\in O(4)$ より直交補空間 $\langle 1,g\rangle^\perp$ が J 不変になることと、この上の直交複素構造が($\pm 90°$ 回転の) 2つしかないことと、

$$T=\langle 1,g\rangle\oplus\langle 1,g\rangle^\perp$$

から、T 上の cx str. は $\langle 1,g\rangle$ と $\langle 1,g\rangle^\perp$ への制限から一意的に定まることから従う。//

- $T = \mathbb{H}$ 上の直交複素構造の別の与え方

$$T_{\mathbb{C}} \simeq V_+ \otimes_{\mathbb{C}} V_- \quad (Sp(1)_+ \times Sp(1)_- \text{-同型})$$

を思い出す。これより，次の２種類の複素構造を得る：

- $\overset{\neq 0}{u} \in V_+$ に対し，$\langle u \rangle \otimes V_- = T^{0,1}$ (i.e. J の $-\sqrt{-1}$ 固有空間) となるような複素構造
- $\underset{\neq 0}{v} \in V_-$ に対し，$V_+ \otimes \langle v \rangle = T^{0,1}$ となるような複素構造

- これらはともに内積を保つ.
- パラメータ空間は，それぞれ $\mathbb{P}(V_+)$, $\mathbb{P}(V_-)$.（定数倍したものは同一の複素構造を定めるから。）
- cx orientation は相異なる。

$$\boxed{\text{自然な可微分同型}\ \mathcal{T}_+ \simeq \mathbb{P}(V_+)\ \text{がある.}}$$

略証. $Sp(1)_+ \times Sp(1)_-$-同型 $T_{\mathbb{C}} \simeq V_+ \otimes V_-$ の具体的な表示から, $u = z + jw \in V_+ = \mathbb{H}$ に対し, $T^{0,1} = \langle u \rangle \otimes V_-$ となる J は, ($u \neq 0$)

$$q := \frac{-i(|z|^2 - |w|^2) - j \cdot 2 \cdot \mathrm{Im}(z\bar{w}) + k \cdot 2 \cdot \mathrm{Re}(z\bar{w})}{|z|^2 + |w|^2} \quad \text{— } (\maltese)$$

を左からかけることによって得られることがわかる。これは, $w = 1$ とすれば, 平面 $\mathbb{C}(z)$ $(\subset \mathbb{P}(V_+))$ から単位球面 (in $\mathrm{Im}\,\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$) への立体射影 (の逆写像) に他ならないので, 可微分同相 $\mathbb{P}(V_+) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{T}_+$ を与える。//

注. $(\maltese)$ は, ツイスター理論の基本定理の証明の際に重要な役割をはたす。 (後述)

• (T, g, J) : 内積と複素構造をもったベクトル空間
$g(Ju, Jv) = g(u, v)$ とする。

以下，J の双対写像も J で表す。

このとき，$\theta^1, \cdots, \theta^n$ を T^* の $\mathbb{C}$ 上の onb として，
ケーラー形式 ω_J が

$$\omega_J := -\theta^1 \wedge J\theta^1 - \cdots - \theta^n \wedge J\theta^n$$

で定義される。これは $\theta^1, \cdots, \theta^n$ の取り方に依らない。

$$\theta^i \wedge J\theta^i = -2\sqrt{-1}\,(\underbrace{\theta^i - \sqrt{-1}J\theta^i}_{\text{タイプ}(1,0)}) \wedge (\underbrace{\theta^i + \sqrt{-1}J\theta^i}_{\text{タイプ}(0,1)})$$

より，$\omega_J \in \Lambda^{1,1}$

• $\dim T = 4$ のときの，$(\Lambda^2 T^*)_{\mathbb{C}}$ のタイプへの分解と $\Lambda^2 = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-$ の関係

$T = \mathbb{H}$ とみるとき，$\forall J \in \mathcal{C}_+$ に対して次式が成立：

• $(\Lambda_+)_{\mathbb{C}} = \Lambda_J^{2,0} \oplus \Lambda_J^{0,2} \oplus \langle \omega_J \rangle$
• $(\Lambda_-)_{\mathbb{C}} = (\Lambda_J^{1,1})_0 := (\langle \omega_J \rangle^{\perp} \text{ in } \Lambda_J^{1,1})$

ただし，$\{1, i, j, k\}$ を oriented basis としている。

特に，$\forall J \in \mathcal{C}_+$ に対して以下が成立：

• ω_J は自己双対的.
• 反自己双対形式はタイプ (1,1).
• $\Lambda_J^{1,1} = \langle \omega_J \rangle \oplus \Lambda_-$ $\left(\because \Lambda_J^{1,1} \cap \Lambda_+ = \langle \omega_J \rangle. \right)$

Pf. θ^1, θ^2 を (T^*, g) の $\mathbb{C}$ 上の onb とすると, $J \in \mathcal{C}_+$ より $\theta^1, J\theta^1, \theta^2, J\theta^2$ が oriented basis であることがわかる。よって, $\omega_J = -\theta^1 \wedge J\theta^1 - \theta^2 \wedge J\theta^2 \ (= \varphi^1)$ は自己双対的。また, (2,0) 形式の空間の生成元は,

$$
\begin{aligned}
&(\theta^1 - iJ\theta^1) \wedge (\theta^2 - iJ\theta^2) \\
&\quad = (\underbrace{\theta^1 \wedge \theta^2 - J\theta^1 \wedge J\theta^2}_{\leftrightarrow \varphi^2}) - i(\underbrace{\theta^1 \wedge J\theta^2 + J\theta^1 \wedge \theta^2}_{\leftrightarrow \varphi^3})
\end{aligned}
$$

より, 実部, 虚部とも自己双対的. よって $\Lambda^{2,0}_J \subset (\Lambda_+)_{\mathbb{C}}$. これの複素共役をとって, $\Lambda^{0,2}_J \subset (\Lambda_+)_{\mathbb{C}}$. 以上より

$$\Lambda^{2,0}_J + \Lambda^{0,2}_J + \langle \omega_J \rangle \subset (\Lambda_+)_{\mathbb{C}}.$$

左辺, 右辺とも 3 次元なので等号が成立.

また，Λ_-の基底として，

$$\theta^1\wedge J\theta^1-\theta^2\wedge J\theta^2\ (=\psi^1),\ \theta^1\wedge J\theta^2-J\theta^1\wedge\theta^2\ (=\psi^3),$$
$$\theta^1\wedge\theta^2+J\theta^1\wedge J\theta^2\ (=\psi^2),$$

をとれば，$\psi^1\in\Lambda_J^{1,1}$であり，ψ^2,ψ^3についても

$$(\theta^1+iJ\theta^1)\wedge(\theta^2-iJ\theta^2)\in\Lambda_J^{1,1}$$
$$=(\theta^1\wedge\theta^2+J\theta^1\wedge J\theta^2)+i(-\theta^1\wedge J\theta^2+J\theta^1\wedge\theta^2)$$
$$(\theta^1-iJ\theta^1)\wedge(\theta^2+iJ\theta^2)\in\Lambda_J^{1,1}$$
$$=(\theta^1\wedge\theta^2+J\theta^1\wedge J\theta^2)-i(-\theta^1\wedge J\theta^2+J\theta^1\wedge\theta^2)$$

を辺々足す/引くことにより得られるので，$\psi^2,\psi^3\in\Lambda_J^{1,1}$.
以上から$(\Lambda_-)_a\subset\Lambda_J^{1,1}$. また，$\psi^1,\psi^2,\psi^3\in\langle\omega_J\rangle^\perp$も
容易にたしかめられる．//

- $J \in \mathcal{C}_+$ として i, j or k をとったとき，ω_J と $\Lambda_J^{2,0}$ の生成元は それぞれ 以下で与えられる：

	$J = i$	$J = j$	$J = k$
ω_J	φ^1	φ^2	φ^3
(2,0)形式	$\varphi^2 + i\varphi^3$	$\varphi^3 + i\varphi^1$	$\varphi^1 + i\varphi^2$

ここで，$\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ は以前の通り，

$$\varphi^1 = dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4,$$
$$\varphi^2 = dx^1 \wedge dx^3 - dx^2 \wedge dx^4,$$
$$\varphi^3 = dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^3.$$

- ケーラー形式のなす集合 $\{\omega_J \mid J \in \mathcal{C}_+\}$ は，Λ^+ 内の半径 $\sqrt{2}$ の球面をなす。

$$\boxed{\varphi \in \Lambda^2 \text{ が反自己双対的} \Longleftrightarrow \varphi \in \Lambda^{1,1}_J,\ {}^\forall J \in \mathcal{C}_+}$$

<u>Pf.</u> $(\Lambda_-)_{\mathbb{C}} = \bigcap_{J \in \mathcal{C}_+} \Lambda^{1,1}_J$ を示せばよい。

すでにみたように $\Lambda_- \subset \Lambda^{1,1}_J \quad {}^\forall J \in \mathcal{C}_+$ であるから「$\subset$」はOK.「$\supset$」を示すには,

$$\Lambda^{1,1}_J = (\Lambda_-)_{\mathbb{C}} \oplus \langle \omega_J \rangle \quad (J \in \mathcal{C}_+)$$

より $J \neq J'$ なる ${}^\exists J, {}^\exists J' \in \mathcal{C}_+$ に対して $\langle \omega_J \rangle \neq \langle \omega_{J'} \rangle$ であることを示せばよいが, これは前ページでみたように, $J = i, j$ のとき, ω_J が φ^1, φ^2 で与えられることから明らか. //

自己双対多様体と反自己双対多様体

- (M,g)：リーマン多様体
- Rm：リーマン曲率テンソル of (M,g)

$$
\begin{array}{l}
Rm \in \Lambda^2 \otimes \mathrm{End}\, T \quad (T = TM) \\
\qquad\qquad \wr| \; T \simeq T^* \text{ by } g \\
\qquad\qquad \Lambda^2 \otimes (T^* \otimes T^*) \\
\qquad\qquad\quad \cup \\
\qquad\qquad \Lambda^2 \otimes \Lambda^2 \simeq \mathrm{End}\, \Lambda^2 \\
\qquad\qquad\quad \cup \\
Rm \in \Lambda^2 \odot \Lambda^2
\end{array}
$$

$c_1 : \Lambda^2 \odot \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^1 \odot \Lambda^1$: リッチの縮約

$\Psi \qquad\qquad \Psi$

i.e. $Rm = R_{ijkl} \mapsto R_{ij} := \sum_k R_{ikjk} =: Ric(g)$

リッチ曲率

$\mathrm{Ker}\, c_1 \subset \Lambda^2 \odot \Lambda^2$

p_1 直交射影

$W (= W(g)) := p_1(Rm)$: gのワイル曲率テンソル

- Wは共形不変 i.e. $W(e^f g) = W(g) \quad {}^\forall f \in C^\infty(M)$
- $\dim M \geqq 3$のとき, g : 共形平坦 $\Longleftrightarrow W = 0$
- $Rm = W(g) + Ric(g)$

$$C_2 : \Lambda^1 \odot \Lambda^1 \longrightarrow \Lambda^0 = C^\infty(M)$$ ：トレースをとる map

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^1 \odot \Lambda^1 & & \Lambda^0 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ R_{ij} & \longmapsto & \sum R_{ii} =: R \\ & & \| \\ & & R(g) \end{array}$$

<u>スカラー曲率</u>

$$\mathrm{Ker}(C_2) \subset \Lambda^1 \odot \Lambda^1$$

p_2 : 直交射影

$$\mathrm{Ric}_0(g) := p_2(\mathrm{Ric}(g))$$ <u>トレースレス・リッチテンソル</u>

$$\mathrm{Ric}(g) = \mathrm{Ric}_0(g) + R(g)$$

$$\therefore \ \mathrm{Rm} = \underset{(\text{ワイル})}{W} + \underset{(\text{リッチ}_0)}{\mathrm{Ric}_0} + \underset{(\text{スカラー})}{R}$$

特に <u>$\dim M = 4$ のとき</u> 分解 $\Lambda^2 = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-$ を使うと…

- Ric_0 は（$\mathrm{End}\,\Lambda^2$ の元とみて）$* \cdot Ric_0 = - Ric_0 \circ *$ をみたすので、$Ric_0 : \Lambda_\pm \longrightarrow \Lambda_\mp$ となっている。
- W は（$\mathrm{End}\,\Lambda^2$ の元とみて）$* \cdot W = W \circ *$ をみたすので、$W : \Lambda_\pm \longrightarrow \Lambda_\pm$ となっている。

$$\therefore\ W = \underset{\substack{\cap \\ \mathrm{End}\,\Lambda_+}}{W_+} + \underset{\substack{\cap \\ \mathrm{End}\,\Lambda_-}}{W_-}$$

- $\Lambda^2 = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-$ は共形不変なので、W_+, W_- も共形不変。
- M の向きを入れかえると Λ_+ と Λ_- は入れかわるので、W_+ と W_- が入れかわる。

Def. 向きづけられた4次元リーマン多様体(M, g)が
- <u>自己双対的</u> (self-dual) $\Longleftrightarrow$ $W_- = 0$
- <u>反自己双対的</u> (ASD) $\Longleftrightarrow$ $W_+ = 0$

・R (スカラー曲率)は, $\mathrm{End}\,\Lambda^2$の元とみるとき, $\frac{R}{12}\mathrm{Id}$ となる。

・$Ric_0 = Ric_0^{+-} + Ric_0^{-+}$, $Ric_0^{+-} \in \mathrm{Hom}(\Lambda_+, \Lambda_-)$,
$Ric_0^{-+} \in \mathrm{Hom}(\Lambda_-, \Lambda_+)$

と分解するとき, $Rm \in \Lambda^2 \odot \Lambda^2$ より, Ric_0^{+-} は Ric_0^{-+} からきまる。

・以上から, Rmは, $\Lambda^2 = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-$ に従って,

$$Rm = \begin{pmatrix} W_+ & 0 \\ 0 & W_- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & Ric_0^{+-} \\ Ric_0^{-+} & 0 \end{pmatrix} + \frac{R}{12}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

と分解する。さらに, $\mathrm{tr}\, W_+ = \mathrm{tr}\, W_- = 0$.

自己双対接続と反自己双対接続

- (M, g) : ori. Riem. 4-mfd,
- $E \longrightarrow M$: C^∞ ベクトル束 (/ $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$)

Def. 接続 ∇ on E が 反自己双対的
$\Longleftrightarrow$ 曲率形式 $F_\nabla \in \Lambda^2(\mathrm{End}\, E)$ を, 分解
$\Lambda^2 = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-$ に従って

$$F_\nabla = F_\nabla^+ + F_\nabla^- \quad (F_\nabla^\pm \in \Lambda_\pm(\mathrm{End}\, E))$$

と分解するとき, $F_\nabla^+ = 0$

Prop. (M, g): as above で M はコンパクト，E には計量が入っているとする。$\mathcal{C}(E)$ を E の接続全体のなす(アフィン)空間とする。このときASD接続は，Yang-Mills汎関数

$$\nabla \overset{YM}{\longmapsto} \int_M |F_\nabla|^2 * 1$$

の最小値を与える。

Pf. 分解 $\Lambda^2 = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-$ は直交分解なので，$F_\nabla = F_\nabla^+ + F_\nabla^-$ より

$$|F_\nabla|^2 = |F_\nabla^+|^2 + |F_\nabla^-|^2$$

となる。一方，Chern-Weil 理論より，

$$c := \int_M (|F_\nabla^+|^2 - |F_\nabla^-|^2) * 1$$

は E の特性類で表される。(たとえば $G = SU(2)$ のとき，$c = -4\pi^2 c_2(E)$.) よって ASD 接続が存在すれば $c \leq 0$ であり，$^\forall \nabla \in \mathcal{C}(E)$ に対し，

$$\int_M |F_\nabla|^2 * 1 = \int_M |F_\nabla^+|^2 * 1 + \int_M |F_\nabla^-|^2 * 1$$

$$= -c + 2\int_M |F_\nabla^+|^2 * 1$$

となるから、ASD接続はYMの最小値を与える。//

Prop. (M,g): 向きづけられた4次元R.mfd.について，
レビ・チビタ接続が反自己双対接続
$\iff$ g がASD かつ Ricci 平坦

Pf. ∇ を L.C.接続とすると，$Rm = F_\nabla \in \Lambda^2(\mathrm{End}\,T)$ であるから，

∇: ASD $\iff$ F_∇ の $\Lambda^2_+(\mathrm{End}\,T)$ 成分が 0
$\iff$ Rm の $\Lambda^2_+ \otimes \Lambda^2$ 成分が 0
$\iff$ Rm の $\Lambda^2_+ \otimes \Lambda^2_+$ 成分と $\Lambda^2_+ \otimes \Lambda^2_-$ 成分が 0
$\iff$ $W_+ = R = Ric_0 = 0$
$\iff$ g がASDかつリッチ平坦 //

複素曲面上の反自己双対計量

定理（Gauduchon 他） M：複素曲面，g：ケーラー計量．
このとき，g：ASD $\Leftrightarrow$ $R(g)=0$ （i.e. スカラー平坦．）

Pf. ∇ を $(T^{1,0}M, g)$ の標準接続（チャーン接続）とすると，
$F_\nabla \in \Lambda^{1,1}(\mathrm{End}\, T^{1,0})$．ケーラー性より，標準接続とレビ・チビタ
接続は一致するので，$Rm \in \Lambda^{1,1}(\mathrm{End}\, T)$．よって $Rm \in \Lambda^{1,1} \odot \Lambda^{1,1}$．
また，ω をケーラー形式とすると，$\Lambda^{1,1} = \langle \omega \rangle \oplus \Lambda_-$，$\omega \in \Lambda_+$
だったので，Rm の $\Lambda_+ \otimes \Lambda_+$ 成分は $f \cdot \omega \otimes \omega$ $(f \in C^\infty(M))$
と書ける。ここで，Λ_+ の onb $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ で $\varphi^1 = \omega$ となるものを
とれば，$f \cdot \omega \otimes \omega$ を $\varphi^i \otimes \varphi^j$ について行列表示すれば，

$$\begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。よって $R = f$ となる。よって

$$W_+ = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{f}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}f & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}f & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}f \end{pmatrix}$$

となる，よって $W_+ = 0 \Leftrightarrow f = 0$. そして $R = f$ であるから，$W_+ = 0 \Leftrightarrow R = 0$ //

上記の定理を使った反自己双対計量の構成

- LeBrun, "Explicit self-dual metrics on $\mathbb{CP}^2\#\cdots\#\mathbb{CP}^2$." JDG 34 ('91), 223–253.
- Joyce, "Explicit construction of self-dual 4-mfds", Duke 77 ('95), 519–552.

いずれも，$\underline{\mathbb{C}^2 \text{のブローアップ}}$上にスカラー平坦計量を構成．さらに，共形factorをうまくとれば，一点コンパクト化（$\mathbb{CP}^2\#\cdots\#\mathbb{CP}^2$となる）まで計量が延びることを証明．

4次元多様体のツイスター空間

- (M,g) : ori. Riem. 4-mfd.
- Λ_+, Λ_- : 自己双対/反自己双対 2形式の束
- $P \longrightarrow M$: 向きに適合した onb のなす $SO(4)$ 束

$U \subset M$ を開集合とし, $\hat{P} \to U$ を U 上のスピン構造とする。 i.e.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Spin}(4) \arrow[r, phantom, "\curvearrowright"] & \tilde{P} \arrow[r] \arrow[dr] & P \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\curvearrowleft"] & SO(4) \\
 & & U \subset M &
\end{tikzcd}
\qquad
\mathrm{Spin}(4) = Sp(1)_+ \times Sp(1)_-
$$

各ファイバーでは 2重被ふくで, ふへん被ふく $\mathrm{Spin}(4) \to SO(4)$ を介して同変写像

- スピン構造が大域的に存在
  $\Longleftrightarrow$ Mの交叉形式がeven.
  (よって S^4 はスピン, $\mathbb{C}P^2$ は non-spin.)

- 変換関数系に $\{\pm(1,1)\}$ のずれを許せば,
  大域的に存在する。

$Sp(1)_+ \overset{\rho_+}{\curvearrowright} V_+ = \mathbb{H} = \mathbb{C}^2$: 自然表現

$\mathbb{V}_+ := \widetilde{P} \times_{\rho_+} V_+$: ρ_+ に付随するベクトル束 (on U)

i.e. スピン束

Def. (M, g) の <u>ツイスター空間</u> (twistor space) とは、$\mathbb{C}P^1$ 束

$$Z := \mathbb{P}(\mathbb{V}_+) = (\mathbb{V}_+ - \{0\}) / \mathbb{C}^* \xrightarrow{\pi} M$$

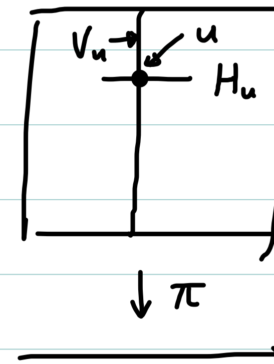
のこと。π を <u>twistor fibration</u>、π のファイバー $(\simeq \mathbb{C}P^1)$ のことを <u>twistor line</u> という.

注. $Sp(1)_+$ (ないし $Spin(4)$) は射影空間 $\mathbb{P}(V_+)$ には作用しているので、$\mathbb{P}(\mathbb{V}_+)$ は大域的に存在する。

ツイスター空間上の自然な概複素構造

ゼロ切断

$Y := \mathbb{V}_+ - \{0\}$



レビ・チビタ接続により, $\forall u \in Y$ に対し, 分解

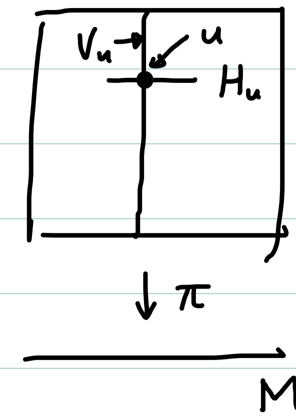
$$T_u Y \simeq \underset{(\text{水平})}{H_u} \oplus \underset{(\text{垂直})}{V_u}$$

がある。

$\mathbb{V}_+$ は $\mathbb{C}$ ベクトル空間なので, V_u には自然な複素構造が入っている。

一方, $\mathbb{P}(\mathbb{V}_+)$ が T の $\overbrace{\text{向き}}^{\&\text{内積}}$と両立する複素構造の空間だったことから, u は $T_{\pi(u)}M$ の複素構造を定める。よって, u は $\pi_* : H_u \xrightarrow{\sim} T_{\pi(u)}M$ を介して, H_u 上の複素構造を定める.

これらの直和として定まる Y 上の
概複素構造を J とする。



定め方から、J は明らかに $\mathbb{C}^*$ 不変.
$(\therefore\ \mathbb{P}(V_+)$ 上の概複素構造に落ちる.$)$

ツイスター理論の基本定理

定理 (Atiyah - Hitchin - Singer '78)
J が積分可能 $\Longleftrightarrow$ $W_+(g) = 0$ (i.e. g : ASD).

通常は, このときに $Z = \mathbb{P}(V_+)$ をツイスター空間という.

基本定理の証明の概要

基本的に, Newlander - Nirenberg の定理による.
i.e. $Y\ (= \mathbb{V}_+ - \{0\})$ 上の任意の (1,0) 形式 α に対して,
$d\alpha$ が (0,2) 成分をもたないことを示す.

概複素構造 J の定め方から, $\Lambda^{1,0}Y$ は $\Lambda^1_{\mathbb{C}}Y$ の次の2つの
部分束 (ともに階数2) で張られる:

(1) $L \otimes \pi^* \mathbb{V}_-$; ただし, L は Y 上の tautlogical 直線束,
また同型 $\mathbb{V}_+ \otimes \mathbb{V}_- \simeq \mathbb{V}_+^* \otimes \mathbb{V}_-^* \simeq T^*_{\mathbb{C}}$ と, π による引き戻し
により, $\mathbb{V}_+ \otimes \mathbb{V}_- \subset T^*_{\mathbb{C}}Y = \Lambda^1_{\mathbb{C}}Y$ とみなしている.
(これは, 水平部分空間に $\mathbb{C}u \otimes V_-$ を (1.0) ベクトルと
する複素構造を入れたことに対応する.)

(2) ω を $\mathbb{V}_+$ の接続行列，$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ を（ωを作るときのフレームと同じフレームから得られる）$\mathbb{V}_+$ 上の複素座標、とするとき，ベクトル値の1形式

$$d\lambda + \omega\lambda$$

の各成分で張られる $\Lambda^1_{\mathbb{C}} Y$ の部分束 (of rank 2).
(これはフレームのとり方によらない.)

これら2つの部分束のうち，(1) に属する α に対しては，反自己双対性の仮定なしに，$d\alpha$ は (0,2) 成分をもたないことが示せる.（L.C. 接続 ∇ が捩れをもたないことから，$d = -A\circ\nabla$（A は交代化作用素）と書けることを使う.）

より本質的なのは，(2)の部分束の切断 α に対して，
$d\alpha$ が $(0,2)$ 成分をもたないための条件が $W_+ = 0$ で
あることを示すこと. i.e.

"各成分が $\Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{1,1}$ に属する"

$$「 d(d\lambda + \omega\lambda) \in \Lambda^{2,0}_Y \oplus \Lambda^{1,1}_Y \iff W_+ = 0 」$$

ここで，$\Omega_+ := d\omega + \omega\wedge\omega$ を V_+ の曲率行列とすると，

$$\begin{aligned} d(d\lambda+\omega\lambda) &= d\omega\cdot\lambda - \omega\wedge d\lambda \\ &= (d\omega + \omega\wedge\omega)\cdot\lambda - \omega\wedge(d\lambda+\omega\lambda) \\ &= \Omega_+\lambda - \omega\wedge\underbrace{(d\lambda+\omega\lambda)}_{\text{タイプ}(1,0)} \end{aligned}$$

より，

$$d(d\lambda+\omega\lambda) \in \Lambda^{2,0}_Y \oplus \Lambda^{1,1}_Y \iff \Omega_+\lambda \in \Lambda^{2,0}_Y \oplus \Lambda^{1,1}_Y$$

よって基本定理を証明するには,次を示せば十分:

$$\boxed{\text{Key prop.} \quad \Omega_+\lambda \in \Lambda^{2,0}_Y \oplus \Lambda^{1,1}_Y \iff W_+ = 0}$$

「各成分が $\Lambda^{2,0}\oplus\Lambda^{1,1}$ に属する」

これの証明は易しくないので,まず次を示す:　(以下同様)

$$\boxed{\text{Prop. A.} \quad W_+ = R = 0 \Rightarrow \Omega_+\lambda \in \Lambda^{2,0}_Y \oplus \Lambda^{1,1}_Y}$$

scalar flat kähler

(すでに示したように, SFK $\Rightarrow W_+ = R = 0$ である.)

Prop. A の証明のためには次を示せば十分である:

$$\boxed{\text{Prop. A}'. \quad W_+ = R = 0 \Rightarrow \Omega_+ \in \Lambda^{1,1}_Y}$$

正確には, $\pi^*\Omega_+ \in \Lambda^{1,1}_Y$

Prop. A' を示すために，リーマン曲率テンソル Rm と，スピン束 $\mathbb{V}_+, \mathbb{V}_-$ の曲率の関係について説明する。

一般に，$P \to M$ を主 G 束，∇_P をその接続とするとき，G の任意の表現 $\rho : G \to GL(\mathbb{K}^r)$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C})$ に対し，付随するベクトル束 $E_\rho := P \times_\rho \mathbb{K}^r$ には ∇_P から induce される接続 ∇_ρ が入る。

また，$\phi : G \to H$ を準同型とするとき，$P \to M$ から主 H 束が得られる。これを $Q \to M$ とする. ∇_P は $Q \to M$ にも接続を定める。$\tau : H \to GL(\mathbb{K}^s)$ を H の表現とすると，$E_\tau := Q \times_\tau \mathbb{K}^s$ にも接続 (∇_τ とする) が入る.

これら2つの接続 ∇_ρ, ∇_τ の関係

$s : U \longrightarrow P$ を切断 とすると, s は E_ρ のフレームを定める. また, $U \xrightarrow{s} P \to Q$ を合成して得られる切断から, E_τ のフレームが得られる. これらのフレームに関する, ∇_ρ, ∇_τ の曲率行列を Ω_ρ, Ω_τ とすると,

($U \underset{\text{open}}{\subset} M$)

$$\Omega_\rho \in \Lambda^2 \otimes \mathfrak{g}, \quad \Omega_\tau \in \Lambda^2 \otimes \mathfrak{f}$$

であり, 両者の間には

$$\Omega_\tau = d\rho \circ \Omega_\rho$$

という関係がある.

(M, g)を向きづけられたリーマン多様体として，以上を次の状況で適用する:

$P \to M$: スピン束 $(\therefore G = Spin(4))$

$\rho : G = Spin(4) \curvearrowright \mathbb{R}^4$: 自然表現 $(\therefore E_\rho = TM)$

$\phi : G = Spin(4) \longrightarrow H = Sp(1)_+$: 射影

$\tau : H = Sp(1)_+ \curvearrowright V_+ = \mathbb{H}$: 自然表現

すると，$Rm \in \Lambda^2 \otimes \mathfrak{spin}(4) = \Lambda^2 \otimes \mathfrak{so}(4)$ とみなすとき，$\mathbb{V}_+$ の曲率テンソル Ω_+ は，分解 $\mathfrak{spin}(4) \simeq \mathfrak{sp}(1)_+ \oplus \mathfrak{sp}(1)_-$ の下

$$\Omega_+ = p_+ \circ Rm \quad (p_+ : \mathfrak{spin}(4) \xrightarrow{\text{proj.}} \mathfrak{sp}(1)_+)$$

で与えられる. さらに，$\mathfrak{so}(4) \simeq \Lambda^2$ の下，$\mathfrak{sp}(1)_+ \simeq \Lambda_+$ だったので，結局 $\underline{\Omega_+ \text{ は } Rm \in \Lambda^2 \otimes \Lambda^2 \text{ の } \Lambda^2 \otimes \Lambda_+ \text{ 成分に他なら}}$
$\underline{\text{ない}}$ことがわかる.

同様に，∇_- の曲率 Ω_- は，Rm の $\Lambda^2\otimes\Lambda_-$ 成分に他ならない．

i.e. $\quad \Lambda^2\otimes\Lambda^2 = (\Lambda^2\otimes\Lambda_+)\oplus(\Lambda^2\otimes\Lambda_-)$

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^2\otimes\Lambda^2 & = & (\Lambda^2\otimes\Lambda_+) & \oplus & (\Lambda^2\otimes\Lambda_-) \\ \cup\!\!\!\!\,\shortmid & & \cup\!\!\!\!\,\shortmid & & \cup\!\!\!\!\,\shortmid \\ Rm & = & \Omega_+ & + & \Omega_- \end{array}$$

<u>Prop. A′ ($W_+ = R = 0 \Rightarrow \Omega_+ \in \Lambda^{1,1}_Y$) の証明</u>.

$\Omega_+ \in \Lambda^2\otimes\Lambda_+ = (\Lambda_+\otimes\Lambda_+)\oplus(\Lambda_-\otimes\Lambda_+)$ より，

$$\Omega_+ = \Omega_{++} + \Omega_{+-}$$

と分解できるが，

$$R = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\Omega_{++} \quad (\Omega_{++}\in \mathrm{End}\,\Lambda_+ \text{ とみている}),$$

$$W_+ = \Omega_{++} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\Omega_{++} \quad (\quad \text{〃} \quad)$$

だったので，$R = W_+ = 0$ のとき，$\Omega_{++} = 0$ である。よって

$\Omega_+ \in \Lambda_-\otimes\Lambda_+$．よって，$\Lambda_- \subset \Lambda^{1,1}_J$，${}^\forall J \in \mathcal{C}_+$ を思い出して，

Ω_+ の各要素は $\Lambda^{1,1}_Y$ の元である．//

Key prop. ($\Omega_+\lambda \in \Lambda^{2,0}_Y \oplus \Lambda^{1,1}_Y \Leftrightarrow W_+ = 0$) の証明.

「⇒」スピン束 $\mathbb{V}_+$ の構造群は $Sp(1) \simeq SU(2)$ であるから,

$\mathbb{V}_+$ の曲率行列 Ω_+ は, ($SU(2)$ -フレームをとっておけば)

$su(2)$ に値をとる。よって, Ω_+ の成分表示は,

$$\Omega_+ = \begin{pmatrix} i\omega_1 & -\omega_2 - i\omega_3 \\ \omega_2 - i\omega_3 & -i\omega_1 \end{pmatrix}$$

ただし, $\omega_n \in \Lambda^2$ (real form)

と書ける。これに $\mathbb{V}_+ \ni \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ (上のフレームに関する成分表示)

をあてると,

$$\Omega_+ \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz\omega_1 + w(-\omega_2 - i\omega_3) \\ (\omega_2 - i\omega_3)z - iw\omega_1 \end{pmatrix}$$

となる。これの両成分を Y 上の2形式とみるとき,

$(0,2)$ 成分をもたないためには, ω_n の Λ_+ 成分 (ω_n^+ とする) が

$$\omega_n^+ = c \cdot \varphi^n \quad ({}^\exists c \in \mathbb{R},\ {}^\forall n \in \{1,2,3\})$$

と書けることが必要十分であることを示す.

まず，再び $\Lambda_- \subset \Lambda^{1,1}_J$ $(\forall J \in \mathcal{C}_+)$ より ASD 形式は $\Lambda^{0,2}_Y$ 成分をもたないので，ω_n の Λ_- 成分からは $(0,2)$ 成分は出ない。
自然写像 $V_+ - \{0\} \to \mathcal{C}_+$ が

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto q = \frac{-i(|z|^2 - |w|^2) - j \cdot 2 \cdot \mathrm{Im}(z\bar{w}) + k \cdot 2 \cdot \mathrm{Re}(z\bar{w})}{|z|^2 + |w|^2}$$

で与えられていたことから，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow q = -i \qquad \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow -j, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow -k$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow q = i, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \longleftrightarrow j, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow k$$

である。これらより，（ω_n の ASD 成分 ω_n^- は $\omega_n^- \in \Lambda^{1,1}_Y$ を考慮に入れて）

$\Omega_+\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ が点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\leftrightarrow -i}{\in} V_+$ で $(0,2)$ 成分をもたない

「各成分が $\Lambda^{2,0}_{-i} \oplus \Lambda^{1,1}_{-i}$ 成分に属する」

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} i\omega_1^+ \\ \omega_2^+ - i\omega_3^+ \end{pmatrix} \in \Lambda^{2,0}_{-i} \oplus \Lambda^{1,1}_{-i} \quad \text{— ①}$$

(以下同様)

$\Omega_+\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ が点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\leftrightarrow i}{\in} V_+$ で $(0,2)$ 成分をもたない

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -\omega_2^+ - i\omega_3^+ \\ -i\omega_1^+ \end{pmatrix} \in \Lambda^{2,0}_{i} \oplus \Lambda^{1,1}_{i} \quad \text{— ②}$$

となる。①、②より、まず $\omega_1^+ \in (\Lambda^{2,0}_{-i} \oplus \Lambda^{1,1}_{-i}) \cap (\Lambda^{2,0}_{i} \oplus \Lambda^{1,1}_{i})$ となるが、$\Lambda^{1,1}_{-i} = \Lambda^{1,1}_{i}$, $\Lambda^{2,0}_{-i} = \Lambda^{0,2}_{i}$ なので、$\omega_1^+ \in \Lambda^{1,1}_{i}$ となる。
さらに、$\omega_1^+ \in \Lambda^+$ で、$\Lambda^+ \cap \Lambda^{1,1}_{i} = \langle \varphi^1 \rangle$ (φ^1 は $J = i$ のときのケーラー形式だった) なので、

$$\omega_1^+ = c \cdot \varphi^1, \quad {}^{\exists} c \in \mathbb{R} \quad \text{— ③}$$

と書ける。また、$\Lambda_+^{\mathbb{C}} \cap (\Lambda^{2,0}_{-i} \oplus \Lambda^{1,1}_{-i}) = \langle \varphi^1, \varphi^2 - i\varphi^3 \rangle$
なので、①の第2成分より、

$$\omega_2^+ - i\omega_3^+ = a\varphi^1 + b(\varphi^2 - i\varphi^3), \quad {}^{\exists} a, b \in \mathbb{C} \quad \text{— ④}$$

と書ける。

次に、

$$\Omega_+\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$ が点 $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \in V_+$ で $(0,2)$ 成分をもたない $\leftrightarrow \mathfrak{g} = -j$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\omega_1^+ - \omega_2^+ - i\omega_3^+ \\ i\omega_2^+ + \omega_3^+ - i\omega_1^+ \end{pmatrix} \in \Lambda_{-j}^{2,0} \oplus \Lambda_{-j}^{1,1}$$

これの第1成分より、

$$\omega_1^+ + \omega_2^+ + i\omega_3^+ \in \Lambda_{-j}^{2,0} \oplus \Lambda_{-j}^{1,1} \quad -⑤$$

第2成分より

$$\omega_1^+ - \omega_2^+ + i\omega_3^+ \in \Lambda_{-j}^{2,0} \oplus \Lambda_{-j}^{1,1} \quad -⑥$$

を得る。③, ④ より

$$\begin{aligned} \omega_1^+ - \omega_2^+ + i\omega_3^+ &= c\varphi^1 - \{a\varphi^1 + b(\varphi^2 - i\varphi^3)\} \\ &= (c-a)\varphi^1 - b\varphi^2 + ib\varphi^3 \quad -⑦ \end{aligned}$$

と書ける。$(\Lambda_{-j}^{2,0} \oplus \Lambda_{-j}^{1,1}) \cap \Lambda_+^{\mathbb{C}} = \langle \varphi^2, \varphi^3 - i\varphi^1 \rangle$ より、⑥ から

$$(c-a)\varphi^1 - b\varphi^2 + ib\varphi^3 \in \langle \varphi^2, \varphi^3 - i\varphi^1 \rangle$$

を得る。よって，φ^3 と φ^1 の係数を見て，

$$ib : (c-a) = 1 : (-i) \quad \therefore \quad b = c-a. \quad -⑧$$

また ③, ④ より

$$\begin{aligned}\omega_1^+ + \omega_2^+ - i\omega_3^+ &= c\varphi^1 + a\varphi^1 + b(\varphi^2 - i\varphi^3)\\ &= (c+a)\varphi^1 + b\varphi^2 - ib\varphi^3 \quad -⑨\end{aligned}$$

となるが，⑤ の複素共役をとることにより，これが $\Lambda_J^{2,0} \oplus \Lambda_J^{1,1}$ に入っている。さらに，$(\Lambda_J^{2,0} \oplus \Lambda_J^{1,1}) \cap \Lambda_+^{\mathbb{C}} = \langle \varphi^2, \varphi^3 + i\varphi^1 \rangle$ なので，⑨ の φ^3 と φ^1 の係数を見ることにより，

$$(-ib) : (c+a) = 1 : i \quad \therefore \quad b = a+c$$

よって ⑧ と合わせて $a=0$，$b=c$ を得る。よって

$$\omega_2^+ - i\omega_3^+ = c(\varphi^2 - i\varphi^3)$$

と書ける。$c \in \mathbb{R}$ であったから，実部と虚部を比較して，

$$\omega_2^+ = c\varphi^2, \quad \omega_3^+ = c\varphi^3$$

を得る。つまり，問題の ベクトル値 2形式

$$\Omega_+ \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz\omega_1 + w(-\omega_2 - i\omega_3) \\ (\omega_2 - i\omega_3) z - iw\omega_1 \end{pmatrix}$$

が $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ で $(0,2)$ 成分をもたないならば

$$\omega_n^+ = c \cdot \varphi^n \quad ({}^\exists c \in \mathbb{R},\ {}^\forall n \in \{1,2,3\})$$

であることがわかった。このとき $\Omega_+ \in \Lambda^2 \otimes \mathfrak{su}(2)$ の自己双対成分 Ω_{++} は、

$$\Omega_{++} = c \cdot \begin{pmatrix} i\varphi^1 & -\varphi^2 - i\varphi^3 \\ \varphi^2 - i\varphi^3 & -i\varphi^1 \end{pmatrix} \quad ({}^\exists c \in \mathbb{R})$$

と書ける。逆に、このとき、(A) ($\mathcal{C}_+ \simeq \mathbb{P}(V_+)$ の具体的な形) を使って、${}^\forall \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in V_+ \setminus 0$ に対して、$\Omega_+ \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ は $(0,2)$ 成分をもたないことが示せる。以上から、次が示せた：

Y 上のベクトル値2形式 $\Omega_+\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ が $\Lambda_Y^{2,0} \oplus \Lambda_Y^{1,1}$ に属する
$\Longleftrightarrow$ Ω_+ の自己双対成分 Ω_{++} が，次の形になっている：

$$\Omega_{++} = c \cdot \begin{pmatrix} i\varphi^1 & -\varphi^2 - i\varphi^3 \\ \varphi^2 - i\varphi^3 & -i\varphi^1 \end{pmatrix} \quad ({}^\exists c \in \mathbb{R})$$

key prop の証明を完結させるためには，次を示せばよい：

Prop. B. Ω_{++} が上の形で書ける $\Longleftrightarrow$ $W_+ = 0$

Prop. B の証明. $\Omega_{++} \in \Lambda_+ \otimes su(2)$ は Rm の $\Lambda_+ \otimes \Lambda_+$ 成分だったので，W_+ は Ω_{++} から定まる。これを具体的に与えるために，Ω_{++} を，$\Lambda_+ \otimes \Lambda_+$ の基底 $\varphi^i \otimes \varphi^j$ に関して行列表示する。

$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Lambda_+$ として,

$$\Omega_{++} = \begin{pmatrix} i\omega_1 & -\omega_2 - i\omega_3 \\ \omega_2 - i\omega_3 & -i\omega_1 \end{pmatrix}$$

$$= \omega_1 \otimes \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \omega_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \omega_3 \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

と書くとき, $su(2) \simeq \Lambda^2_+$ の下,

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \leftrightarrow \varphi^1, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \varphi^2, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \varphi^3$$

となっていることがわかるので, Ω_{++} を $\Lambda_+ \otimes \Lambda_+$ の元として表すと,

$$\Omega_{++} = \omega_1 \otimes \varphi^1 + \omega_2 \otimes \varphi^2 + \omega_3 \otimes \varphi^3$$

となる。よって, $\omega_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \varphi^j$ と表すとき, Rm の $\Lambda_+ \otimes \Lambda_+$ 成分の行列表示は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (=: A)$$

となる. $W_+ = A - \frac{1}{3}\mathrm{tr}A \cdot I$ なので,

$$\begin{aligned} W_+ = 0 &\iff A = \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}A \cdot I \\ &\iff A = c \cdot I \quad {}^\exists c \in \mathbb{R} \\ &\iff \omega_n = c \cdot \varphi^n, \quad n \in \{1, 2, 3\} \\ &\iff \Omega_{++} = c \cdot \begin{pmatrix} i\varphi^1 & -\varphi^2 - i\varphi^3 \\ \varphi^2 - i\varphi^3 & -i\varphi^1 \end{pmatrix} \\ &\qquad\qquad ({}^\exists c \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

以上で Prop. B が示され, key prop., したがって基本定理の証明が終わった.

(以上)