ツイスター空間の幾何学

本多宣博

東京工業大学

2015 年 3 月 21 日

複素構造と共形構造

2 次元ベクトル空間の場合

- T: 2 次元実ベクトル空間,　g: T 上の内積
  $\Rightarrow$ T 上の複素構造で g を保つものはちょうど 2 つある。(± 90 度回転)
- これらの複素構造は内積 g を定数倍しても変わらない (共形不変性)。
- T 上に向きを指定すれば 2 つの複素構造の一つが選ばれる。
- 逆に T 上の複素構造は、T 上の向きと共形構造を定める。

$\therefore$ 複素構造　=　向き & 共形構造

複素構造と共形構造

4 次元ベクトル空間の場合

- T: 4 次元実ベクトル空間,　g: T 上の内積
  $\Rightarrow$ T 上の複素構造で g を保つものは $S^2 \sqcup S^2$ でパラメトライズされ、T の向きを指定すれば一方の S^2 が選ばれる。

$\because$ $v \in T, v \neq 0$ をとると $Jv \in \langle v \rangle^\perp$ (直交補空間, 3 次元).
さらに $|Jv| = |v|$.　$\therefore Jv \in S^2(\langle v \rangle^\perp)$
また $\langle v, Jv \rangle^\perp$ は J 不変なので複素構造の定め方はちょうど 2 通り。
$\therefore$ J は $Jv \in S^2(\langle v \rangle^\perp)$ および T の向きからただ一通り定まる。 $\square$

- g を定数倍してもこれらの複素構造の族は不変。

複素構造と共形構造

$\therefore$ $(T, [g],$ 向き$)$ $\Rightarrow$ S^2 でパラメトライズされる複素構造の族

$\therefore$ 4 次元多様体 M に対して、$([g],$ 向き$)$ $\Rightarrow$ S^2 束 $Z \xrightarrow{\pi} M$.

Z のことを 4 次元共形多様体 $(M, [g],$ 向き$)$ の <u>ツイスター空間</u> という。

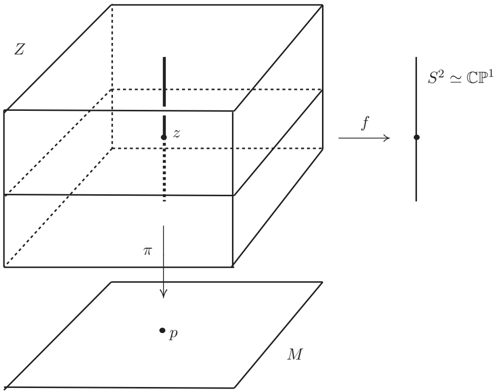
注. 2 次元とのアナロジーでは、

$$T \text{ 上の (共形構造 \& 向き)} \quad = \quad T \text{ 上の四元数構造.}$$

ツイスター空間の最も基本的な例

$M = \mathbb{R}^4$ (4 次元ユークリッド空間) のとき

$$Z \overset{C^\infty}{\simeq} M \times S^2, \quad Z \overset{hol.}{\simeq} \mathscr{O}(1) \oplus \mathscr{O}(1) \xrightarrow{f} \mathbb{CP}^1.$$



自己双対形式と反自己双対形式

4 次元多様体 M に対して

$$\wedge^2 := \wedge^2 T^* M \quad (\mathrm{rank} \wedge^2 = 6)$$

とおく。M に向きとリーマン計量 g が与えられると、ホッジスター作用素

$$* : \wedge^2 \to \wedge^2$$

が次の条件で定まる：

$$(*\phi) \wedge \psi = (\phi, \psi)_g \cdot (\text{vol. form}), \quad \forall \phi, \psi \in \wedge^2.$$

スター作用素は次の性質を持つ：

- $*^2 = \mathrm{id}$,
- $*$ は共形不変。

自己双対形式と反自己双対形式

$\wedge^2$ の部分束 $\wedge^+, \wedge^-$ を次で定める：

$$\wedge^+ = \{\phi \in \wedge^2 \mid *\phi = \phi\},$$
$$\wedge^- = \{\phi \in \wedge^2 \mid *\phi = -\phi\},$$

$\wedge^+$ の元を自己双対形式、$\wedge^-$ の元を反自己双対 (ASD) 形式という。これらは $\wedge^2$ を張り、分解

$$\wedge^2 = \wedge^+ \oplus \wedge^-$$

が成り立つ。この分解は共形不変。

注. M の向きを変える $\Rightarrow$ $\wedge^+$ と $\wedge^-$ が入れ替わる。

自己双対形式と反自己双対形式

M : コンパクト,　$\mathbb{H}^2$: (M, g) 上の調和 2 形式のなす空間とすると、

$$\mathbb{H}^2 = \mathbb{H}^+ \oplus \mathbb{H}^-.$$

ここで

- $\mathbb{H}^+$: 自己双対的な調和 2 形式のなす空間,
- $\mathbb{H}^-$: ASD 調和 2 形式のなす空間.

さらに M の交叉形式は $\mathbb{H}^+$ 上正定値、$\mathbb{H}^-$ 上負定値。

$$\therefore \quad b_+(M) = \dim \mathbb{H}^+, \quad b_-(M) = \dim \mathbb{H}^-.$$

M 上のベクトル束の接続 A が ASD $:\Leftrightarrow \quad *F_A = -F_A$

ASD 接続は Yang-Mills 汎関数の最小値を与え、ゲージ理論で基本的。

自己双対形式と複素構造

M 上の概複素構造 J が与えられると、タイプへの分解が定まる：

$$\wedge^2_{\mathbb{C}} = \wedge^{2,0}_J \oplus \wedge^{1,1}_J \oplus \wedge^{0,2}_J.$$

J が $(g,$ 向き$)$ と両立するとき、分解 $\wedge^2_{\mathbb{C}} = \wedge^+_{\mathbb{C}} \oplus \wedge^-_{\mathbb{C}}$ との関係は以下のようになっている：

- $\omega_J : (g, J)$ から定まる基本 2 形式

$$\Rightarrow \omega_J \in \wedge^+, \quad \wedge^{1,1}_J = \langle \omega_J \rangle \oplus \wedge^-_{\mathbb{C}}.$$

- 逆に $\forall \omega \in \wedge^+, \ |\omega| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \exists! J \text{ s.t. } \omega_J = \omega.$
- $$\wedge^+_{\mathbb{C}} = \wedge^{2,0}_J \oplus \langle \omega_J \rangle \oplus \wedge^{0,2}_J.$$

2 番目の性質から、ツイスター空間は次のように書ける：

$$Z = S^2(\wedge^+) \quad \text{(球面束)}$$

ツイスター空間上の自然な概複素構造と積分可能定理

g のレビ・チビタ接続

$$\rightsquigarrow T_z Z = H_z \oplus V_z, \quad z \in Z.$$

ここで H_z は水平部分空間, $V_z = \operatorname{Ker} \pi_*$.

$p := \pi(z) \in M$ とおくと、

$$z \in Z \rightsquigarrow J \text{ on } T_p M \rightsquigarrow J \text{ on } H_z$$

V_z には、球面上の自然な複素構造がある。これらの直和により、Z 上に自然な概複素構造が定まる。これは一般には積分可能ではなく、以下が成立する：

Theorem (Penrose, Atiyah-Hitchin-Singer)

Z 上の自然な概複素構造が積分可能 $\Leftrightarrow$ g が ASD 計量

ASD 計量

一般に、リーマン計量の曲率テンソルを Rm と書くと

$$\mathrm{Rm} \in \wedge^2 \odot \wedge^2 \quad \text{(対称積)}.$$

多様体が 4 次元で向きづけられている

$$\Rightarrow \wedge^2 = \wedge^+ \oplus \wedge^- \rightsquigarrow \mathrm{Rm} = R_{++} + R_{+-} + R_{-+} + R_{--}.$$

さらに次のように分解：

$$R_{++} = \mathrm{Scal} + W_+, \quad R_{--} = \mathrm{Scal} + W_-.$$

- W_+ : 自己双対ワイル曲率テンソル
- W_- : 反自己双対ワイル曲率テンソル

一方 $R_{+-} = \mathrm{Ric}_0$ (=トレースレスリッチテンソル).

リーマン計量が ASD :⇔ $W_+ = 0$. この条件は共形不変。

ASD 計量

- $R_{++} + R_{+-} = (\wedge^+$ 上の自然な接続の曲率$)$,
- $R_{-+} + R_{--} = (\wedge^-$ 上の自然な接続の曲率$)$.

$\therefore \wedge^+$ が平坦 $\Leftrightarrow \quad R_{++} = R_{+-} = 0 \;\Leftrightarrow\; W_+ = \mathrm{Scal} = \mathrm{Ric}_0 = 0$
$\Leftrightarrow\; W_+ = \mathrm{Ric} = 0.$

このとき、たとえば底空間 M が単連結であれば、Z は自然な自明化

$$Z \overset{C^\infty}{\simeq} M \times S^2$$

を持ち、Z はユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ の場合と似た性質を持つ。
この場合の積分可能定理の証明は比較的容易。

次に証明が容易なのは $R_{++} = 0$ の場合 ($\Leftrightarrow \wedge^+$ 上の接続が ASD)。
一番面倒なのは単に $W_+ = 0$ の場合。

ASD 計量とケーラー計量

次は ASD **計量の重要な例を与える：**

Proposition (Gauduchon, M. Itoh 他)

(M, J, g) **をケーラー曲面とするとき、** g **が** *ASD* $\Leftrightarrow \mathrm{Scal}\, g = 0$.

証明. **ケーラーであることから、レビ・チビタ接続＝チャーン接続。**

$$\therefore \mathrm{Rm} \in \wedge_J^{1,1} \otimes \wedge_J^{1,1}.$$

また $\wedge_J^{1,1} = \langle \omega_J \rangle \oplus \wedge_{\mathbb{C}}^{-}$ **だったので**

$$R_{++} = f \cdot \omega_J \otimes \omega_J, \quad \exists f \in C^\infty(M)$$

$$\therefore W_+ = 0 \;\Leftrightarrow\; R_{++} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Scal}\, g = 0. \square$$

$\therefore$ Ricci-flat Kähler **計量は** ASD **であり、** $\wedge^+$ **は平坦。**

ツイスター空間の基本的な性質とペンローズ対応

$g : M$ 上の ASD 計量, Z : そのツイスター空間, とする.

(i) $\exists \pi : Z \overset{C^\infty}{\to} M : S^2$ 束写像. また $\pi^{-1}(p) : Z$ の複素部分多様体, $\forall p \in M$.
$[\pi^{-1}(p)$ の正則な意味での法束$] \simeq \mathscr{O}(1) \oplus \mathscr{O}(1)$.
π : 「ツイスター射影」、ファイバー : 「ツイスター直線」.

(ii) $\exists \sigma : Z \to Z$: 反正則な対合. σ は π の各ファイバーを保つ。また σ は固定点を持たない。
σ :「実構造」

逆に M 上にこれらの性質を満たす (Z, σ, π) が与えられると、M 上には ASD 計量（正確にはその共形類）が自然に定まる。

これより次の一対一対応 (Penrose 対応）を得る：

$$M \text{ 上の ASD 共形類} \;\Leftrightarrow\; M \text{ 上のツイスター空間}$$

ツイスター空間の基本直線束

Z : **ツイスター空間**, $\ell = \pi^{-1}(p)$: **ツイスター直線**

$$\Rightarrow K_\ell \simeq K_Z|_\ell \otimes \det N_{\ell/Z} \quad (\because \textbf{随伴公式})$$

$K_\ell \simeq \mathscr{O}(-2)$, **また** $N_{\ell/Z} \simeq \mathscr{O}(1)^{\oplus 2}$ **より** $\det N_{\ell/Z} \simeq \mathscr{O}(2)$

$$\therefore K_Z|_\ell \simeq \mathscr{O}(-4).$$

$\therefore Z$ **がコンパクト** $\Rightarrow \kappa(Z) = -\infty$.

- $K_Z^{1/4}$ **が存在する** $\Leftrightarrow M$ **がスピン構造をもつ。**
- $K_Z^{1/2}$ **はいつでも存在する。** $K_Z^{1/2}|_\ell \simeq \mathscr{O}(-2)$.
- $K_Z^{-1/2}$ **をツイスター空間上の基本直線束といい、** F **で表す。**

$$F|_\ell \simeq \mathscr{O}(2), \quad \overline{\sigma^* F} \simeq F.$$

コンパクトツイスター空間の基本的な例

- S^4 上の標準的な計量は共形平坦なので、とくに ASD. $Z = \mathbb{CP}^3$.
  $S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\} = \mathbb{H} \cup \{\infty\} = \mathbb{HP}^1$ とみなせば、ツイスター射影 $\pi : \mathbb{CP}^3 \to S^4$ は自然な商写像
  $$\mathbb{CP}^3 = \mathbb{C}^4 \backslash \{0\} / \mathbb{C}^* \to \mathbb{H}^2 \backslash \{0\} / \mathbb{H}^\times = S^4$$
  で与えられる。$F = \mathscr{O}(2)$.
- $\mathbb{CP}^2$ 上の標準的な計量は複素向きの逆に関して ASD。Z は旗多様体
  $$\mathbb{F} = \{(x, l) \in \mathbb{CP}^2 \times (\mathbb{CP}^2)^* \mid x \in l\}$$
  となる。基本直線束 $F = \mathscr{O}(1,1)|_{\mathbb{F}}$

これら以外にケーラー計量を持つコンパクトツイスター空間は存在しない (Hitchin (1981) の定理)。

ツイスター空間とケーラー計量

$\pi : Z \to M$ をツイスター空間とすると、

$$H^2(Z,\mathbb{R}) \simeq \pi^* H^2(M,\mathbb{R}) \oplus \langle K_Z \rangle.$$

実構造 σ の作用：

- $\pi^* H^2(M,\mathbb{R})$ **上には自明**,
- $\langle K_Z \rangle$ **には** (-1) **倍**.

一方、$\omega : Z$ **上のケーラー形式** $\Rightarrow -\sigma^*\omega$ **もケーラー形式**. $\therefore\ \omega - \sigma^*\omega$ **もケーラー形式**. σ^* **で** (-1) **倍される。コホモロジー類をとれば**

$$[\omega - \sigma^*\omega] = c \cdot K_Z, \quad \exists c \in \mathbb{R}.$$

$K_Z|_l = \mathscr{O}(-4)$ **だったから、**$c < 0$ **である。** $\therefore\ -K_Z > 0$.

$\therefore$ **コンパクトツイスター空間** Z **がケーラー計量を持つ** $\Rightarrow Z$: Fano.

Moishezon ツイスター空間

Theorem (Y. S. Poon 1986)

$\exists$ *ASD* 計量 *on* $2\overline{\mathbb{CP}}^2$ *s.t.* Z が *Moishezon.* このとき

$$Z \sim Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{CP}^5 \quad \text{(双有理同値)},$$

$$Q_1, Q_2 : \mathbb{CP}^5 \text{ 内の非退化 2 次超曲面}.$$

コンパクト複素多様体が Moishezon :$\Leftrightarrow$ 射影代数多様体と双有理同値.

Z は $\mathrm{Bs}\,|F| = \emptyset$, $\dim |F| = 5$ を満たし、$\Phi_F(Z) = Q_1 \cap Q_2$.

$Z \supset \exists C_1, C_2$: 非特異有理曲線 s.t. $N_{C_i/Z} \simeq \mathscr{O}(-1)^{\oplus 2}$.
Φ は $C_1, \overline{C}_1, C_2, \overline{C}_2$ を 1 点につぶす写像。

随伴公式から $F.C_i = 0$.　$C_i, \overline{C}_i$ たちが Z の射影代数性への障害。

Moishezon ツイスター空間

Theorem (Poon 1992, Kreussler-Kurke 1992)

$Z : 3\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上の *Moishezon* ツイスター空間 $\Rightarrow \dim|F| = 3$. また次が成立:

(i) $\mathrm{Bs}\,|F| \neq \emptyset \Rightarrow$ 有理写像 $\Phi_F : Z \to \mathbb{CP}^3$ の像は非退化 *2* 次曲面, 一般ファイバーは非特異有理曲線。

(ii) $\mathrm{Bs}\,|F| = \emptyset \Rightarrow$ 射 $\Phi_F : Z \to \mathbb{CP}^3$ は全射で *2* 次。分岐因子は *4* 次曲面。

(i) の場合,

$$\mathrm{Bs}\,|F| = C \cup \overline{C}, \quad C : \text{非特異有理曲線}. \quad F.C = -1.$$

これらが射影性への障害。

(ii) の場合、$F.C = 0$ を満たす有理曲線 C が有限個（generic には 13 個) 存在し、これらが射影性への障害。分岐因子はそれらの像で特異点を持つ。

Moishezon ツイスター空間をもつ 4 次元多様体

Theorem (Campana 1990)

$(M, g,$ 向き$)$: **コンパクト** *ASD* **多様体**, Z: *Moishezon* $\Rightarrow\ M \simeq S^4$ or $n\overline{\mathbb{CP}}^2$.

これは、Moishezon **空間（より一般には藤木クラス** $\mathcal{C}$**）のサイクル空間のコンパクト性と、次の定理による：**

Theorem (Freedman, Donaldson, LeBrun)

$(M, g,$ 向き$)$: **コンパクト単連結** *ASD* **多様体**, $\mathrm{Scal}\, g > 0$
$\Rightarrow\ M \simeq S^4$ or $n\overline{\mathbb{CP}}^2$.

$Z : n\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上のツイスター空間,　$F : Z$ 上の基本直線束, とすると

$$F^3 = 8 - 2n.$$

これとリーマンロッホの公式より、

$$\chi(F) = 10 - 2n.$$

常に $H^3(F) = 0$. また $\mathrm{Scal}\, g > 0$ のとき $H^2(F) = 0$ ($\because$ Hitchin の消滅定理).

$$\therefore \dim H^0(F) - \dim H^1(F) = 10 - 2n.$$

$\therefore n \leq 3$ のとき $\dim H^0(F) \geq 4$.　$n = 4$ のとき $\dim H^0(F) \geq 2$.

$4\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上の Moishezon ツイスター空間

Theorem (H. 2014)

$Z : 4\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上の *Moishezon* ツイスター空間 $\Rightarrow$ Z の反標準写像 Φ は以下のいずれかを満たす：

(i) Φ は像の上に双有理,

(ii) Φ は像の上に *2* 対 *1*,

(iii) $\Phi(Z)$ は *2* 次元.

いずれの場合についても、$\dim |K_Z^{-1}|$ および像 $\Phi(Z)$ の定義方程式を具体的に決めることができる。

特に、(ii) のツイスター空間については $\dim |K_Z^{-1}| = 4$ $\therefore$ $\Phi(Z) \subset \mathbb{CP}^4$.

$$\Phi(Z) = p^{-1}(C), \quad p : \mathbb{CP}^4 \to \mathbb{CP}^2 \text{ 線形射影}, \quad C : 2 \text{ 次曲線}.$$

さらに、Φ の分岐因子は $p^{-1}(C)$ の 4 次超曲面によるカット。

$n \geq 5$ のとき : Moishezon ツイスター空間の分類定理は知られていない。

知られているすべての例は $\dim |F| \geq 1$ を満たし、ほとんどの場合、$\dim |F| = 1$.

$\dim |F| \geq 2$ のとき : 分類がなされている。

$\dim |F| = 1$ のとき : 多くの例について、$|mF|$ が双有理ないし 2 対 1 写像を与えるような m が具体的に計算でき、付随する有理写像を使って Z の構造を調べられる。

このような m に対していつでも $\mathrm{Bs}\,|mF| \neq \emptyset$ $(\because F^3 = 8 - 2n < 0)$.

$n\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上の Moishezon ツイスター空間の例

Theorem (H. 2015)

$\forall n \geq 4,\ \exists Z\ \ on\ \ n\overline{\mathbb{CP}}^2\ \ s.t.$

(i) $\dim|F| = 1$ であり、$m < n-2$ のとき $|mF|$ は $|F|$ で合成されている。

(ii) $m = n-2$ のとき $|mF|$ は $|F|$ で合成されておらず、$\dim|mF| = n$ が成り立つ。$\Phi := \Phi_{(n-2)F}$ とすると、$\Phi(Z) \subset \mathbb{CP}^n$,

$$\Phi(Z) = p^{-1}(C), \quad p : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^{n-2}\ \text{線形射影}, \quad C : \text{正規有理曲線}.$$

(iii) Φ は $p^{-1}(C)$ 上 $2:1$ であり、分岐因子は 4 次超曲面によるカット。

このツイスター空間は、$3\overline{\mathbb{CP}}^2$, $4\overline{\mathbb{CP}}^2$ の場合に出てくるものの一般化とみなすことができる。

しかし、実際には完全な一般化にはなっておらず、類似の構造を持ったより大きい族が存在することが予想される。

前定理の証明で使われた方法はかなり適用範囲が広い。

$\dim |F| = 1$ **を満たすツイスター空間は基本的に類似の方法で構造が調べられると思われる。**

そこで、次の問題に興味が持たれる：

問題. $\exists ? Z$: Moishezon **ツイスター空間** s.t. $|F| = \emptyset$.
$\exists ? Z$: Moishezon **ツイスター空間** s.t. $|F| = \{$ single member $\}$.