セグレ 4 次曲面とミニツイスター空間

本多 宣博

東工大理学院数学系

代数・解析・幾何学セミナー

ミニツイスター空間とは

定義 1

2 次元複素多様体で自己交点数が 2 の非特異有理曲線をもつものを**ミニツイスター空間**とよぶ。またこのような非特異有理曲線を**ミニツイスター直線**とよぶ。

小平の定理によりミニツイスター直線たちは 3 次元複素多様体でパラメトライズされる族をなす。以下ではこの 3 次元複素多様体を W で表す。

Example 1

非特異 2 次曲線 Λ 上のコーン $C(\Lambda) \subset \mathbb{CP}^3$.
$C(\Lambda)$ 上のミニツイスター直線のなす空間 W は $\mathbb{C}^3$ と同一視される。

Example 2

$\mathbb{CP}^3$ 内の非特異 2 次曲面 Q。
Q^* を Q の双対多様体（つまり Q の接平面のなす空間）とすれば、Q 上のミニツイスター直線のなす 3 次元複素多様体 W は $\mathbb{CP}_3^*\backslash Q^*$ である。

定理 2 (Hitchin 1983)

ミニツイスター空間のなす 3 次元複素多様体 W 上には複素 Einstein-Weyl 構造が入る。

Example 3

上記のコーン $C(\Lambda)$ の場合、ミニツイスター直線のなす 3 次元複素多様体 $W = \mathbb{C}^3$ に入る Einstein-Weyl 構造は標準的なもの（平坦なもの）となる。また非特異 2 次曲面 Q の場合、$W = \mathbb{CP}_3^* \backslash Q^*$ 上に入る Einstein-Weyl 構造は定曲率空間構造となる。

命題 3

コンパクトミニツイスター空間で「極小」なものは上記コーンと非特異 2 次曲面のみである。

定義 4 (H.-中田文憲 2011)

g を非負整数とする。2 次元複素多様体はその上に自己交点数が 2+2g の有理曲線でちょうど g 個の通常二重点をもち、それ以外に特異点を持たないものをもつとき、**種数 g のミニツイスター空間**とよばれる。このような有理曲線も**ミニツイスター直線**とよばれる。

定理 5 (同上)

この意味でのミニツイスター空間に対してもその上のミニツイスター直線のなす空間は 3 次元複素多様体（これも W で表す）となり、その上には複素 Einstein-Weyl 構造が入る。

命題 6 (同上)

S を種数 $g\ (\geq 0)$ のコンパクトミニツイスター空間とすると、ミニツイスター直線のなす完備線形系は $3+g$ 次元で固定点を持たず、付随する正則写像 $\Phi : S \to \mathbb{CP}_{3+g}$ は像への双有理写像である。また像は $2+2g$ 次の有理曲面であり、その一般超平面切断は種数 g の非特異曲線である。

そこで以下のように定義する。

定義 7

種数 $g\ (\geq 0)$ のコンパクトミニツイスター空間 S が極小 $\Longleftrightarrow$ 前命題の双有理写像 $\Phi : S \to \mathbb{CP}_{3+g}$ が埋め込み。

このとき S を Φ により $\mathbb{CP}_{3+g}$ の subvariety とみなすと、ミニツイスター直線はその（特殊な）超平面切断として得られるので、自然な包含関係 $W \subset \mathbb{CP}^*_{3+g}$ があり、

$$W \approx \{ H \in \mathbb{CP}^*_{3+g} \,|\, H \text{ は } S \subset \mathbb{CP}_{3+g} \text{ にちょうど } g \text{ 点で接する} \}$$

となる。

- ミニツイスター直線のなす 3 次元複素多様体 W はいつでも非コンパクトであるが、その $\mathbb{CP}^*_{3+g}$ における閉包 $\overline{W}$ は subvariety になる。
- これは**セベリ多様体**と呼ばれる対象（の特別な場合）。
- $g = 0$ のとき、$W\,(= \mathbb{C}^3, \mathbb{CP}^*_3 \backslash Q^*)$ は $\mathbb{CP}^*_{3+g} = \mathbb{CP}^*_3$ のザリスキ開集合なので $\overline{W} = \mathbb{CP}^*_3$.
- $g = 1$ のとき、$\overline{W} \subset \mathbb{CP}^*_{3+g} = \mathbb{CP}^*_4$ は S の双対多様体 S^* と一致する。特にいつでも既約。
- $g > 1$ のとき、$\overline{W} \subset \mathbb{CP}^*_{3+g}$ は双対多様体 S^* の strict な subvariety となり、構造を調べにくい。たとえば既約性は明らかではない。

種数 1 のコンパクトミニツイスター空間

- 命題 6 より、S を種数 1 のコンパクト極小ミニツイスター空間とすると、S は $\mathbb{CP}_4$ の非退化 4 次曲面である。
- $\mathbb{CP}_4$ の非退化既約 4 次曲面は以下のように分類されている：
  - $\mathbb{CP}_5$ 内の 4 次曲面の $\mathbb{CP}_4$ への射影
  - $\mathbb{CP}_3$ 内の非退化 4 次曲線上のコーン
  - これら以外。
- 最後のアイテムに属する曲面を**セグレ 4 次曲面**という。
- これは

  「4 次の非特異 weak del Pezzo 曲面の反標準写像による像」

  と言っても同じ。
- すべてのセグレ 4 次曲面は $(2, 2)$ 完全交叉であり、定義式を標準化することにより 16 種類に分類される。
- これらのうち、非特異なものは 1 種類のみであり、残りの 15 種類はいずれも（一般には複数の）有理二重点を持つ。

定理 8 (H. 2020)

非退化既約 4 次曲面 $S \subset \mathbb{CP}_4$ が種数 1 のコンパクト極小ミニツイスター空間であるためには S がセグレ 4 次曲面であることが必要十分。

証明のアウトライン; ($\Longrightarrow$)

- すでに述べたことから $S \subset \mathbb{CP}_4$ は次のいずれか：
  - $\mathbb{CP}_5$ 内の 4 次曲面の $\mathbb{CP}_4$ への射影
  - $\mathbb{CP}_3$ 内の非退化 4 次曲線上のコーン
  - セグレ曲面
- 一つ目は一般超平面切断による切断の算術種数が 0 なので種数 1 のミニツイスター空間にはなり得ない。
- 二つ目（コーン）がミニツイスター空間になっているためには非退化 4 次曲線が非特異でなければならないが、そうすると超平面がコーンの頂点を通るときだけ切断に特異点が出る。しかし特異点はミニツイスター空間の非特異点でなければならないのでやはり不可。
- よって 3 つ目の可能性のみ起こる。

証明のアウトライン; ($\Longleftarrow$)

- セグレ 4 次曲面 $S \subset \mathbb{CP}_4$ の非特異点における接平面を含む超平面 H を十分一般にとれば切断 $S \cap H$ はただ一つの通常二重点を持つ有理曲線である。
- また $S \cap H$ の S 内での自己交点数は S の次数と等しいので 4 である。
- 以上から $S \cap H$ は S 上のミニツイスター直線であり、S は種数 1 のミニツイスター空間である。 $\square$

$S \subset \mathbb{CP}_4$ をセグレ 4 次曲面とし、S 上のミニツイスター直線のなす 3 次元複素多様体を W とする。

- $W \subset \mathbb{CP}_4^*$ であり、その閉包 $\overline{W}$ は S の双対多様体 $S^* \subset \mathbb{CP}_4^*$ と一致していた。
- W は複素 Einstein-Weyl 構造をもち、$\overline{W}$ のザリスキ開集合だった。

命題 9 (H. 2020)

W を上の通りとすると、3 次元射影代数多様体 $\overline{W} = S^*$ は有理的（すなわち $\mathbb{CP}_3$ と双有理同値）。

証明のアウトライン

- $I(S)$ を S の incidence variety, すなわち

$$I(S) = \mathrm{Cl}\{(x, H) \in S_{\mathrm{reg}} \times \mathbb{CP}_4^* \mid T_x S \subset H\}$$

とすると次の図式がある：

- 射影 p_1 の一般ファイバーは $\mathbb{CP}_4^*$ 内の直線である。
- 点 $y \in \mathbb{CP}_4$ を十分一般にとれば、一般の点 $x \in S$ に対して $T_x S$ と y が張る射影空間 $\langle T_x S, y \rangle$ は 3 次元であり $T_x S$ を含む。

- よって y を固定するとき、対応 $x \longmapsto \langle T_x S, y \rangle$ により射影 p_1 の双有理切断を得る。
- p_1 のファイバーは有理的であり S も有理的なので、これは $I(S)$ が有理的であることを意味する。
- さらに、S^* の一般の点 H に対して H は S とただ一点で接するので射影 p_2 は次数 1、すなわち双有理である。
- 以上から S^* は有理的である。 $\square$

さらに、16 種類すべてのセグレ 4 次曲面 S に対して、双対多様体 S^* の射影空間 $\mathbb{CP}_4^*$ 内での次数（S の class とよばれる）を具体的に与えることができる。例えば以下が成立。

- 非特異な S に対しては $\deg S^* = 12$.
- S が特異点を持つとき、それらの種類と個数に応じて $\deg S^*$ は下がる。一番次数の低いものは 4 次。

ミニツイスター空間の実構造と Einstein-Weyl 空間の無限遠境界

S をコンパクトミニツイスター空間とし、W を S から定まる 3 次元複素 Einstein-Weyl 多様体とする。

- S 上に実構造（つまり反正則な対合）$\sigma : S \to S$ であってミニツイスター直線が属する線形系を保つものがあるとする。
- このとき S 上のミニツイスター直線で σ 不変なもの全体を考えると、これは W の実 3 次元部分多様体になる。これを W^σ で表し、W のリアルスライスとよぶ。これはいわば複素多様体 W の「実部」である。
- W 上の複素 Einstein-Weyl 構造を W^σ に制限することにより W^σ は実 3 次元 Einstein-Weyl 空間となる。（共形構造は定値とは限らない。）
- $\overline{W}$ を W の自然なコンパクト化とすると、σ は $\overline{W}$ 上の実構造に延びる。このとき補集合 $\overline{W}^\sigma \setminus W^\sigma$ は実 3 次元 Einstein-Weyl 空間 W^σ の「無限遠境界」とみなせる。

Example 4

- 非特異 2 次曲面 $Q \subset \mathbb{CP}_3$ は種数 0 のミニツイスター空間だった。
- Q 上のミニツイスター直線がなす 3 次元複素多様体 W は $\mathbb{CP}_3^* \backslash Q^*$ と同一視できた。
- Q 上の実構造 σ として $Q^\sigma \simeq S^2$ となるものをとると、

$$W^\sigma = (\mathbb{CP}_3^*)^\sigma \backslash (Q^*)^\sigma \simeq \mathbb{RP}_3 \backslash S^2 \tag{1}$$

  であり、これは 2 つの連結成分からなる。
- このうちの一方は 3 次元ボール B^3 と同相であり、Q^σ と交わらないミニツイスター直線たちをパラメトライズする。
- この B^3 に入る Einstein-Weyl 構造は負の定曲率空間構造。
- よって $(Q^*)^\sigma \simeq S^2$ は双曲空間の無限遠境界とみなせ、Q^* はその「複素化」と思える。

Remark 10

- (1) のもう一方の連結成分には不定値な定曲率空間構造が入る。
- Q 上の実構造として $Q^\sigma = \emptyset$ なるものをとると、$W^\sigma \simeq \mathbb{RP}^3$ となり、W^σ 上には標準的な正の定曲率空間構造が入る。

問. 補集合 $\overline{W} \backslash W$ の構造を求めよ。またセベリ多様体 $\overline{W}$ は $\overline{W} \backslash W$ の各既約成分においてどのような特異点を持つか。 □

一般に射影代数多様体 $X \subset \mathbb{CP}_n$ に対してその双対多様体 $X^* \subset \mathbb{CP}_n^*$ は非特異からはほど遠い。

- たとえば、平面代数曲線 $X \subset \mathbb{CP}_2$ に対して双対曲線 $X^* \subset \mathbb{CP}_2^*$ は X の複接線に対応する点において通常二重点を持つ。
- X^* の特異点集合について、一般に次が成り立つことが期待される：

$$\mathrm{Sing}\,(X^*) = \{H \in X^* \mid H \cap X \text{ は 2 つ以上の特異点を持つか、} \\ \text{通常二重点でない特異点を持つ}\}$$

X がセグレ曲面の場合には以下が成立する。

命題 11 (H. 2020)

非特異なセグレ曲面を含む多くのセグレ曲面 S に対して $S^*\backslash W$ は非特異 2 次曲面を既約成分の一つとしてもち、S^* はこの 2 次曲面に沿って通常二重点を持つ。

証明のアウトライン：

- 多くのセグレ曲面 $S \subset \mathbb{CP}_4$ に対して、S 上にない特別な点をとれば、そこからの射影 $\pi : S \to \mathbb{CP}^3$ により S は非特異 2 次曲面 Q 上の分岐二重被覆の構造をもつ。
- h を Q の一般の接平面とすれば、$H := \pi^{-1}(h) \subset \mathbb{CP}_4$ は S にちょうど 2 点で接する超平面であり、切断 $S \cap H$ はちょうど 2 点で通常二重点を持つ。
- よって $S \cap H$ はミニツイスター直線ではないので $H \notin W$ であるが、もちろん $H \in S^*$ である。
- よって $Q^* \subset S^*\backslash W$ である。

- $Q \cap h = l_1 \cup l_2$（l_1, l_2 は Q 上の直線で接点 p で横断的に交わる）であるから、$S \cap H$ は、p 上にある 2 点 p_1, p_2 で横断的に交わる 2 つの 2 次曲線 C_1, C_2 の和となる。

- 上記の超平面 H を p_1 の近くでの接平面を含むように動かすことにより、超平面切断がただ一つの通常二重点を持つようにできる。
- 同様に、超平面 H をもう一方の接点 p_2 の近くでの接平面を含むように動かすことにより、超平面切断がただ一つの通常二重点を持つようにできる。
- これらは、S^* が 2 次曲面 Q^* に沿って 2 つの既約成分（枝）を持つことを意味する。 $\square$

Remark 12

- セグレ曲面 S が非特異 2 次曲面上の二重被覆の構造をもつかどうかは S が 16 種類のうちのどれに入っているかで決まる。
- セグレ曲面 S 上には常に有限個の直線が乗っている。l をそのような直線で S の特異点を通らないものとすると、l を含む $\mathbb{CP}_4$ の超平面がなす平面 $l^* \subset \mathbb{CP}_4^*$ に沿って、S^* は通常二重点をもつ。
- 以上のように、$S^* \backslash W$ は一般に複数の既約成分からなる。

$S \subset \mathbb{CP}_4$ をセグレ 4 次曲面とし、$S \cap H$ を超平面切断で特異点をもつものとする。

- セグレ曲面の断面種数は 1 であるから、$S \cap H$ が既約なとき、特異点は 1 点だけであり、それは通常二重点かカスプである。
- 通常二重点であれば $H \in W$ であり、カスプであれば $H \notin W$ である。
- よって $S^* \backslash W$ はカスプを一つもつような超平面切断たちからなる既約成分を持ちうる。

定義 13

セグレ 4 次曲面 $S \subset \mathbb{CP}_4$ に対して、その超平面切断でただ一つのカスプを持つもののなすものの（$\mathbb{CP}_4^*$ 内での）閉包を cuspidal locus という。

これは S^* の subvariety となる。
cuspidal locus について以下が成り立つ。

定理 14 (H. 皆川綾杜 2021)

セグレ曲面 S に対してその cuspidal locus は空でなければ 2 次元で既約であり、S^* はそこに沿ってカスプを持つ。

- 16 種類のうち、ちょうど 2 種類のセグレ曲面に対して cuspidal locus は空となることがわかる。
- 空でないとき、cuspidal locus はもとの曲面 S と双有理になるか、S の二重被覆の構造をもつかのいずれかとなる。後者のうち一般型の曲面となっているものが存在する。