# ツイスター空間論 (と自己双対計量) の問題

本多 宣博

東工大理学院数学系

複素幾何学の諸問題 II

# ツイスター空間と自己双対計量

**定義 1**

$M$ を実 4 次元多様体とする。次の性質を満たす 3 次元複素多様体 $Z$ を $M$ 上の**ツイスター空間**という。

- $Z$ は $M$ 上の $C^\infty$ な $\mathbb{CP}^1$ 束の構造 $\pi : Z \to M$ を持つ。
- $\pi$ の各ファイバーは $Z$ の複素部分多様体であり、その法束は $O(1)^{\oplus 2}$ と同型。$\pi$ のファイバーはツイスター直線とよばれる。
- 反正則対合 $\sigma : Z \to Z$ で固定点を持たず $\pi$ の各ファイバーを保つものが存在する。$\sigma$ は実構造とよばれる。

**定理 2 (Penrose 対応)**

実 4 次元多様体 $M$ 上のツイスター空間と $M$ 上の自己双対共形構造は一対一に対応する。

# ツイスター空間の基本的な性質

- 非自明な正則微分形式（多重なものを含めて）をもたない。
- 標準束は自然な「半分」をもつ。$K^{-1/2}$ のことを基本直線束という。
- ケーラー計量を持てば $-K > 0$ となる。

**定理 3 (Hitchin 1981)**

コンパクトツイスター空間でケーラー計量を持つものは標準的なツイスター空間 $\mathbb{CP}^3$ と旗多様体 $F_{1,2}$ のみである。

**問題 1 ($\star\star$)**

非コンパクトツイスター空間でケーラー計量をもつものはどのくらい存在するか。例えばハイパーケーラー多様体のツイスター空間ではどうか。

# $n\mathbb{CP}^2$ 上のツイスター空間

**定理 4 (Campana 1991)**

Moishezon ツイスター空間の底空間は $S^4$ または複素射影平面の連結和 $n\,\mathbb{CP}^2$ と同相である。（射影平面の個数 $n$ に制限はつかない。）

- 非射影的 Moishezon ツイスター空間を持つのは $n > 1$ のときのみ。
- 多くの Moishezon ツイスター空間の例が知られている（後述）。
- $n\mathbb{CP}^2$ 上のツイスター空間 $Z$ に対しては

$$(-K_Z)^3 = 16(4-n)$$

  が成立しており、代数次元 $a(Z)$ は反標準次元 $\kappa(-K_Z)$ に等しいので、$n<4, n=4, n>4$ の各場合で状況がかなり異なる。
- たとえば $n<4$ のとき、スカラー曲率（以下 $s$ で表す）が正ならばツイスター空間は Moishezon である。$n \geq 4$ のときこれは不成立。

## negative scalar curvature

**問題 2 ($\star\star\star$)**

$n \le 4$ のとき $n\mathbb{CP}^2$ 上に $s < 0$ なる自己双対共形構造が存在するか。

- $n > 4$ のときは存在する (LeBrun-Maskit)。
- $n \le 4$ のとき $s = 0$ なる自己双対共形構造は存在しない (同上) ので、$s < 0$ なる自己双対共形構造が存在すれば、自己双対共形構造のモジュライ空間は非連結となる。
- 問題**??**は次の問題と同値。

**問題 3 ($\star\star\star$)**

$n \le 4$ のとき $n\mathbb{CP}^2$ 上に $a(Z) = 0$ なるツイスター空間は存在するか。

# $n < 4$ のときの問題

- $2\mathbb{CP}^2$ 上の $s > 0$ なる自己双対共形構造は非コンパクト連結 1 次元のモジュライ空間をなし、その一方の end は 2 つの $\mathbb{CP}_2$(with Fubini-Study 計量) への分裂として、もう一方の end は 2 つの Eguchi-Hanson 空間への分裂として理解される。
- $2\mathbb{CP}^2$ 上の $s > 0$ なる自己双対共形構造のツイスター空間はすべて $\mathbb{CP}^5$ 内の特殊な形の $(2,2)$ 完全交叉と双有理同値 (Poon)。

**問題 4 ($\star$)**

上記の退化をこれらのツイスター空間を用いて理解せよ。

# $n < 4$ のときの問題

**問題 5 ($\star$)**

$2\mathbb{CP}^2$ の場合をモデルにして、$3\mathbb{CP}^2$ 上の $s > 0$ なる自己双対共形構造のなすモジュライ空間の境界を幾何学的に理解せよ。

$3\mathbb{CP}^2$ のツイスター空間については次が知られている。

**定理 5 (Poon, Kreussler-Kurke 1992)**

$3\mathbb{CP}^2$ 上の $s > 0$ なる自己双対共形構造のツイスター空間は次のいずれかを射影モデルに持つ。

- 非特異 *2* 次曲面上の *conic* 束 *(LeBrun* 型*)*
- $\mathbb{CP}^3$ の二重被覆で特異 *4* 次曲面で分岐するもの *(double solid* 型*)*

# $n < 4$ のときの問題

この結果から、次を問うのは reasonable であると思われる。

**問題 6 ($\star\star$)**

$3\overline{\mathbb{CP}^2}$ 上の $s > 0$ なる自己双対共形構造のなす空間は連結か。

- double solid 型のツイスター空間に対応する自己双対計量を構成する、ツイスター空間を利用する、という 2 方針が考えられる。
- 自己同型群が 1 次元以上の自己双対共形構造に対してはツイスター空間を用いて肯定的であることが示されている。

**問題 7 ($\star\star$)**

$3\overline{\mathbb{CP}^2}$ 上の double solid 型のツイスター空間に対応する自己双対計量を構成せよ。

# 一般の Moishezon ツイスター空間に関する問題

**問題 8 ($\star\star\star$)**

Moishezon ツイスター空間を分類し、それらの代数幾何的な構造を記述せよ。

- Poon, LeBrun, Joyce, Campana-Kreussler, H. などにより多くの Moishezon ツイスター空間の例が与えられている。
- $n \leq 4$ のときは分類や構造の記述はほぼ完了している。したがって $n > 4$ のときが問題となる。
- 基本的には、多重基本系 $|mK^{-1/2}|$ またはその部分系を用いて構造を調べることになる。
- $\dim |K^{-1/2}| \geq 1$ を満たすものについてはかなり詳細な結果が得られている。(H. 2018)

# 一般の Moishezon ツイスター空間に関する問題

**問題 9 ($\star\star$)**

Moishezon ツイスター空間で $\dim |K^{-1/2}| < 1$ を満たすものが存在するか。

**問題 10 ($\star\star$)**

Moishezon ツイスター空間に対して多重基本系 $|mK^{-1/2}|$ の底点集合の既約成分は常に非特異な有理曲線となるか。また底点集合は微分幾何的にはどのような意味を持つか。

**問題 11 ($\star\star$)**

非射影的 Moishezon ツイスター空間上にはいつでもホモローガス to ゼロな 1 次元サイクルが存在するか。

# 一般の Moishezon ツイスター空間に関する問題

**問題 12 ($\star\star\star$)**

Moishezon ツイスター空間は常に有理的か。

**問題 13 ($\star\star\star$)**

任意の Moishezon ツイスター空間は互いに変形同値か。

# $a(Z) = 2$ を満たすツイスター空間

$a(Z)$ で $Z$ の代数次元を表す。

**定理 6 (藤木 2002)**

$a(Z) = 2$ のとき、*4* 次元多様体 $M$ は $n\mathbb{CP}^2$ と同相であるか、または $(S^3 \times S^1)\# n\mathbb{CP}^2$ $(n \geq 0)$ を不分岐有限被覆としてもつ。

- 実際に $a(Z) = 2$ なるツイスター空間が知られている $M$ は、$4\mathbb{CP}^2$ と $S^3 \times S^1$（の有限群作用による商空間）のみ。
- $n < 4$ のときは $n\mathbb{CP}^2$ 上に $a(Z) = 2$ なるツイスター空間は存在しない。

# $a(Z) = 2$ を満たすツイスター空間

**問題 14 ($\star\star$)**

$n > 0$ のとき $(S^3 \times S^1)\# n\mathbb{CP}^2$ 上に $a(Z) = 2$ なるツイスター空間が存在するか。

**問題 15 ($\star\star$)**

$n > 4$ のとき $n\mathbb{CP}^2$ 上に $a(Z) = 2$ なるツイスター空間が存在するか。

- 存在したとすると、それは $\dim |K^{-1/2}| < 1$ を満たす (H.-Kreussler)。
- 存在すれば、$n > 4$ のとき $n\mathbb{CP}^2$ 上のツイスター空間はすべての代数次元をとることになる。

# $a(Z) = 2$ を満たすツイスター空間

**問題 16 ($\star$)**

$4\mathbb{CP}^2$ 上の $a(Z) = 2$ なるツイスター空間を分類せよ。

- Campana-Kreussler による例と H. による例が知られている。

**問題 17 ($\star$)**

$4\mathbb{CP}^2$ 上の $a(Z) = 2$ なるツイスター空間に含まれる曲面を分類せよ。特に、常に非代数的な曲面が含まれるか。

- Hopf 曲面を含む例が知られている。（非正規 subvariety として含まれている。）

**問題 18 ($\star\star$)**

$a(Z) = 2$ なるツイスター空間 $Z$ に対して代数的簡約写像の構造（底空間の構造、判別式集合の構造、特異ファイバーの構造など）を記述せよ。

# 自己双対計量に関する問題

- $n\mathbb{CP}^2$ 上の自己双対計量で $U(1)$ 作用をもつものが、上半空間上のラプラス方程式の基本解を用いて具体的に構成されている (LeBrun 1991)。
- これは、概念的には、3 次元 Einstein-Weyl 空間上の $U(1)$ モノポール方程式の解が 1 次元の群作用をもつ自己双対計量を定めるという Jones-Tod (1985) の一般的結果の一例として理解される。

**問題 19 ($\star\star$)**

3 次元 Einstein-Weyl 空間の新しい例を与え、その上の $U(1)$-モノポール方程式を解き、それを用いて 1 次元の群作用をもつ自己双対計量の新たな族を構成せよ。

- この問題はツイスター空間とミニツイスター空間に関する問題に翻訳することができ、そちらはある程度解決されている (H. 2010)。

# 自己双対計量に関する問題

- Moishezon ツイスター空間で $\dim |K^{-1/2}| = 1$ を満たすものは LeBrun 型と double solid 型に分類される (H. 2018)。
- LeBrun 型のツイスター空間に対応する自己双対共形構造の構成を問うのが前問。

**問題 20 ($\star\star\star$)**

$n\mathbb{CP}^2$ 上の double solid 型のツイスター空間に対応する自己双対共形構造を記述せよ。

- double solid 型のツイスター空間は、射影空間内の単独の 4 次超曲面から定まる。（4 次超曲面にはかなり強い制約がかかる。）

# 自己双対計量に関する問題

- Campana-Kreussler (1998) により、$n > 3$ のとき、$n\mathbb{CP}^2$ 上の Moishezon ツイスター空間で $\dim |K^{-1/2}| = 2$ を満たすものが構成されている。
- これらは性質 $\dim |K^{-1/2}| = 2$ で特徴づけられる。

**問題 21 ($\star\star$)**

これらの Moishezon ツイスター空間が定める自己双対共形構造を具体的に記述せよ。

これらのツイスター空間は、線形系 $|K^{-1/2}|$ により $\mathbb{CP}^2$ 上の conic 束の構造を持ち、generic なツイスター直線は conic に写される。

**問題 22 (LeBrun $\star\star$)**

（実とは限らない）ツイスター直線の像となっている conic たちがなす超曲面 in $|\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}(2)| = \mathbb{CP}^5$ を求めよ。

# ミニツイスター空間

- もともとミニツイスター空間は、自己交点数が 2 の非特異有理曲線（＝ミニツイスター直線）をもつ複素曲面として定義された。
- 次の対応がある (Hitchin 1982)。

$$\text{ミニツイスター空間} \Longleftrightarrow \text{3 次元 Einstein-Weyl 多様体}$$

- この対応のうち「$\Longrightarrow$」は、$g$ を任意の非負整数として、「$g$ 個の通常二重点をもつ有理曲線で自己交点数が $2g+2$ のもの」をもつ複素曲面に対してもそのまま成立する。(H.-中田 2011)
- このような有理曲線をもつ複素曲面もミニツイスター空間とよばれる。有理曲線をミニツイスター直線という。
- 通常二重点の個数 $g$ をミニツイスター空間の種数という。

# ミニツイスター空間に関する問題

- コンパクトで種数 1 のミニツイスター空間で、「極小」なものはセグレ曲面と呼ばれる一連の代数曲面（4 次の weak del Pezzo 曲面の反標準モデル）と一致する (H. 2020)。
- ミニツイスター直線は、セグレ曲面に接する超平面による切断として得られる。
- セグレ曲面に対応する Einstein-Weyl 空間は、セグレ曲面の双対多様体のザリスキー開集合。特に非コンパクト。

一般に種数が $g$ のコンパクト極小ミニツイスター空間は、ミニツイスター直線が生成する完備線形系により、$\mathbb{CP}^{g+3}$ 内の $2g+2$ 次曲面として実現される。

**問題 23 ($\star\star$)**

コンパクトで種数が 2 以上の極小ミニツイスター空間を射影代数曲面として具体的に与えよ。

# ミニツイスター空間に関する問題

これらのミニツイスター空間に対応する Einstein-Weyl 空間は、セベリ多様体とよばれる代数幾何学的な対象のザリスキー開集合。

問題 24 ($\star\star$)

これらのセベリ多様体の構造を調べよ。特にその次数や Einstein-Weyl 空間の補集合の構造を求めよ。（$g = 1$ のときは [H.2020, H.2021] で調べられている。）

問題 25 ($\star\star$)

ミニツイスター空間に実構造を導入し、対応する Einstein-Weyl 空間の real slice とその微分幾何的な性質を調べよ。

# Joyce 計量のツイスター空間

- $n\mathbb{CP}^2$ 上には Joyce 計量と呼ばれる自己双対共形構造があり、それらは $T^2$ 作用をもつものとして特徴づけられる (藤木)。

**問題 26 ($\star\star$)**

Joyce 計量のツイスター空間の具体的な構成方法を与えよ。

- $n < 4$ のときは既知。
- $n = 4$ のときは反標準写像による像を求めることができ、それに具体的な双有理変換を与えることによりツイスター空間が構成できる。$n > 4$ のときは未解決。

**問題 27 ($\star\star$)**

Joyce 計量のツイスター空間に対して多重基本系 $|mK^{-1/2}|$ に付随 する有理写像が双有理になるような $m$ の最小値を求めよ。またそのような $m$ に対して $|mK^{-1/2}|$ の底点集合の（canonical な）解消を与えよ

# 連結和構成

- $M_1.M_2$ が自己双対共形構造を持つとき連結和 $M_1 \# M_2$ 上にも自己双対共形構造が入るための十分条件が Floer (1989), Donaldson-Friedman (1989) により与えられている。
- orbifold としての連結和の場合にも類似の結果が期待されるが、これは自己双対共形構造そのものを解析することにより Kovalev-Singer (2003) 等により解決されている。

**問題 28 ($\star\star$)**

自己双対共形構造の、orbifold に対する連結和構成を、ツイスター空間を用いて与えよ。

- もっとも易しい場合は LeBrun-Singer によりなされている。