量子ループ代数の表現論におけるクラスター代数構造の応用について

大矢 浩徳 (東京工業大学)

量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ とは複素単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ のループ化 $\mathcal{L}\mathfrak{g} := \mathbb{C}[z^{\pm 1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ の普遍包絡環の q-変形である Hopf 代数である．量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の有限次元表現圏 $\mathscr{C}_\mathfrak{g}$ は $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ の有限次元表現圏とは対照的に，非完全可約，非 braided なテンソルアーベル圏であり，その構造は複雑である．有限次元既約表現のテンソル積表現の研究の一つとして，Grothendieck 環 $K(\mathscr{C}_\mathfrak{g})$ の構造の研究が挙げられる．2010 年頃，Hernandez–Leclerc は Grothendieck 環 $K(\mathscr{C}_\mathfrak{g})$ に，Fomin–Zelevinsky によって導入されたクラスター代数の構造が自然に入ることを予想し，特別な場合に証明を行った．自然にクラスター代数の構造が入るとは，あるクラスター代数と $K(\mathscr{C}_\mathfrak{g})$ が同型であり，クラスター単項式がその同型を介して既約表現の同型類に対応するという意味である．クラスター単項式は初期シードと呼ばれるデータから順次計算できるものなので，$K(\mathscr{C}_\mathfrak{g})$ のクラスター代数構造は (実) 単純表現の q-指標を計算する手続きを与えるものとなる．なお，Hernandez–Leclerc, Nakajima, Qin, Kashiwara–Kim–Oh–Park らの研究を始めとするその後の多くの研究により，Hernandez–Leclerc の当初の予想は広く解決に至っている．

本講演では, $K(\mathscr{C}_\mathfrak{g})$ のクラスター代数構造の新たな応用として, Dynkin 型の異なる $\mathfrak{g}$ に対応する $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現の q-指標の間に，非自明な関係が見出されるという我々の結果を紹介する．これは Dynkin 型の異なる $\mathfrak{g}$ に対する $K(\mathscr{C}_\mathfrak{g})$ におけるクラスター代数構造を比較することと，我々が以前に証明した (量子)Grothendieck 環の間の同型を用いることで得られる結果である．

本講演の内容は藤田遼氏, David Hernandez 氏, Se-jin Oh 氏との共同研究に基づくものである.