一般 Schur 分割定理と対称群のモジュラースピン表現論

土岡 俊介（東大数理）

よく知られているように，Hardy との手紙のやりとりにおいて，Ramanujan は驚くべき等式を大量に提示した．そのうち最初の手紙（1913 年 1 月 16 日付け）に記された

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{e^{-6\pi}}{\vdots}}}} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) e^{2\pi/5}$$

は，Rogers-Ramanujan 連分数として今日にその名を残している（以下，Rogers-Ramanujan=RR と略記する）．Hardy は RR 連分数を含む類似の 3 つの等式に言及し，"[They] defeated me completely.（中略）A single look at them is enough to show that they could only be written down by a mathematician of the highest class" と，その衝撃を回顧した（Amer.Math.Monthly, **44** (1937), p.144）．

RR 連分数は，RR 恒等式と呼ばれる以下の恒等式から導出される：

$$1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^4}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^9}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots=\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{5n+1})^{-1}(1-q^{5n+4})^{-1}.$$

これは 1915 年に出版された MacMahon の Combinatory Analysis において予想と扱われたが，Rogers によって 1894 年に証明されていた．再び，Hardy は"it would be difficult to find more beautiful formulae than Rogers-Ramanujan identities" と評している（“Ramanujan”, Cambridge University Press, 1940）．

RR 恒等式から，分割定理

> 隣接するパートの差が 2 以上であるような n の分割は，各パートが mod 5 で ± 1 であるような n の分割と同数存在する

が直ちに得られる（RR 分割定理）．MSC 分類「11P84 Partition identities; identities of Rogers-Ramanujan type」の存在からも分かる通り，RR 型の恒等式や分割定理の研究は，数学の一分野と考えられている．

我々は任意の奇数 $p \geq 3$ ごとに興味深い分割定理を発見・証明したので，報告したい．これは $p = 3, 5$ の場合には，以下の有名な分割定理（正確な命題は省略）とそれぞれ一致する．

Schur 分割定理　1926 年，Schur は RR 分割定理の mod 6 版を発見した．

Andrews の予想　1970 年代，Andrews は RR 分割定理の 3 パラメーター一般化に成功し，関連して 1 つの分割定理を予想した．これは 1994 年に計算機を援用して証明された（Andrews-Bessenrodt-Olsson）．

証明には，京都スクールによる量子群の表現論，特に柏原正樹さん（RIMS）の結晶基底の理論が用いられる．研究の動機は，対称群の p-モジュラースピン表現論にあったので，分割定理とそれの間に期待される関係についても説明したい．なお本講演は，渡部正樹さん（東大数理）との共同研究に基づく．