非線形シュレディンガー方程式の安定・不安定ソリトンを含む大域挙動分類

大阪大学情報科学研究科　中西賢次

非線形シュレディンガー方程式や KdV 方程式を始めとする非線形分散型方程式は、波の分散性と非線形性を用いて波動現象の時間発展を記述する偏微分方程式の総称である。その解の時間発展は分散性と非線形性の競合により様々で、典型的には散乱解、爆発解、ソリトン解の存在と性質が６０年代より詳しく研究されているが、これら性質の異なる解を比較・統合し得る形での研究はこの１０年で大きく進展した。その中での重要な視点としては、不安定なソリトン（特に基底状態と呼ばれる最低エネルギーのもの）が、解集合の境界を捉える要となる事、重要な手法としては、分散性波動の時空可積分性に対して変分法を適用し、ダイナミクス変化に関する「最小解」を構成する事（Kenig-Merle の方法）が挙げられる。

しかしこれらは安定なソリトンが介在すると修正を要するため、安定なソリトンがある場合の研究結果は殆どがその近傍での解挙動に限定されている。実際には安定なソリトン・不安定なソリトンが共に存在する事が多いので、そのような設定での大域的解析手法の構築が望まれる。

そこで最も簡単な設定として、空間局在の線形ポテンシャル項を持つ非線形シュレディンガー方程式を考える（３次元空間で３乗冪）。ポテンシャルと非線形項がどちらも集約性の場合、それぞれに由来するソリトンが生じるが、質量（L^2 ノルム）が十分小さい球対称解に限定すれば、エネルギーが小さい方から１番目と２番目がそれぞれポテンシャルと非線形項に由来し、安定・不安定なソリトンになる。

このとき更にエネルギーが２番目のソリトンを大きく超えない解へ制限すると、その挙動は「安定なソリトンへの散乱」「不安定なソリトンによる捕捉」「爆発」へと分類され、これらの間の時間的遷移が各解につき１回だけ可能であり、過去と未来の挙動を合わせると９個の無限集合に全ての解が分類される。なお、励起状態ソリトンのエネルギーは質量に反比例して大きいため、質量・エネルギーの制約条件はスケール的に小さな解への制限にはなっておらず、爆発解を含む事がその傍証になる。証明のポイントは、安定なソリトンをバックグラウンドと見なして波動の分散性成分にのみ Kenig-Merle の方法を適用し、さらに非線形散乱理論が不完全な場合でも最小解の構成ができるよう、解の分解方法を改める所である。