講演題目. モノドロミー保存変形の幾何学と量子化

概要. モノドロミー保存変形とは, モノドロミーを不変に保つような線型微分方程式の変形を意味する. そのための条件を求める問題 (L.Fuchs の問題) に対する最初の解答は R.Fuchs により得られた (1905). すなわち, Riemann 球面上の Fuchs 型方程式

$$
\begin{aligned}
&Y_{zz} - \Big\{\frac{\alpha_4 - 1}{z} + \frac{\alpha_3 - 1}{z-1} + \frac{\alpha_0 - 1}{z-t} + \frac{1}{z-q}\Big\}Y_z \\
&+ \frac{1}{z(z-1)}\Big\{\frac{q(q-1)p}{z-q} - \frac{t(t-1)H}{z-t} + \alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)\Big\}Y = 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

について, そのモノドロミーが t に依存しないための条件は, α_i が定数 ($\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$) で, q, p, H が次を満たすことである:

$$
H = \frac{q(q-1)(q-t)}{t(t-1)}\Big\{p^2 - (\frac{\alpha_4}{q} + \frac{\alpha_3}{q-1} + \frac{\alpha_0 - 1}{q-t})p + \frac{\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}{q(q-1)}\Big\}, \tag{2}
$$

$$
q_t = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad p_t = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{3}
$$

式 (2) は $z = q$ で解 Y が非対数的であることから得られ, 式 (3) は式 (1) と

$$
\frac{t(t-1)}{q-t}Y_t + \frac{z(z-1)}{z-q}Y_z + \frac{q(q-1)p}{q-z}Y = 0, \tag{4}
$$

との両立条件として導かれる. 言い換えれば, 式 (1), (4) は第 6 型 Painlevé 方程式 P_{VI} に対する Lax 対を与えている.

方程式 (3) は Hamilton 系であるので, 変数 q, p に正準交換関係を与えることで自然な量子化が考えられる. H.Nagoya と講演者は, こうして得られる量子 Lax 対について, 退化した場合を含め以下のことを示した: (i) 2 組の変数 (q, p), (z, ∂_z) は量子系では完全に対等である, (ii) 古典系のもつ拡大アフィン・ワイル群対称性は量子系にも持ち上がる, (iii) Lax 対の線型方程式系は共形場理論の相関函数の満たす微分方程式として導かれる.(Annales Henri Poincaré (2014) **15**, 313-344)

本講演では, 方程式 (1) の (q, p) に関する代数曲線としての幾何学的特徴付けについて考察し, 2 組の変数 (q, p), (z, ∂_z) の対称性の観点からその意味を考える. また時間に余裕があれば, G.Kuroki により導入された量子タウ函数について, その幾何学的特徴付けについても述べたい.